Edyta ŁUKASIK
Beata PAŃCZYK
Jan SIKORA

CAŁKOWANIE SYMBOLICZNE W METODZIE ELEMENTÓW BRZEGOWYCH FOURIERA

STRESZCZENIE *Tradycyjna metoda elementów brzegowych (MEB) pozwala uzyskać rozwiązanie problemu, ale tylko w przypadku istnienia znanego rozwiązania fundamentalnego. Bardziej uniwersalne podejście oferuje MEB Fouriera, która realizuje, przy pewnych założeniach, obliczenia bez znajomości rozwiązania podstawowego. Równoważność obu metod została pokazana w pracy. Współczynniki ostatecznego układu równań liniowych wyznaczane są w przestrzeni Fouriera. W artykule zaprezentowano implementację całkowania symbolicznego w pakiecie Matlab do wyznaczania całek osobliwych w MEB Fouriera.*

Słowa kluczowe: *Metoda Elementów Brzegowych Galerkina i Fouriera, całkowanie symboliczne*

1. WSTĘP

Metoda elementów brzegowych (MEB) [5] jest numeryczną metodą rozwiązywania równań całkowo-brzegowych, w których poszukiwana funkcja

dr Edyta ŁUKASIK, dr Beata PAŃCZYK
e-mail: edytaf@cs.pollub.pl, beatap@cs.pollub.pl

prof. dr hab. inż. Jan SIKORA
e-mail: sik59@wp.pl

Instytut Informatyki, Instytut Elektroniki i Technik Informacyjnych,
Politechnika Lubelska

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 260, 2012

znajduje się pod znakiem całki obliczanej po brzegu pewnego obszaru. Do obliczeń całek zwykle stosowane jest całkowanie numeryczne [3, 5]. Celem niniejszej pracy jest zastosowanie symbolicznego całkowania [2] do wyznaczenia współczynników układu równań MEB Fouriera [1] na przykładzie równania Poissona, z wykorzystaniem zaimplementowanego w Matlabie pakietu do obliczeń symbolicznych [8].

2. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH FOURIERA

Załóżmy, że dany jest obszar $\Omega \subset R^n$ o brzegu $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ z warunkami brzegowymi Dirichleta u_Γ zdefiniowanymi na Γ_u i Neumana t_Γ zdefiniowanymi na Γ_t. Podstawowym równaniem MEB w n-wymiarowej przestrzeni jest wówczas:

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad x \in \Omega \subset R^n \tag{1}$$

z warunkiem brzegowym:

$$u(x) = u_\Gamma(x), \quad x \in \Gamma_u \subset \Omega, \tag{2}$$

gdzie:

u – nieznana wielkość,

f – znana wartość w obszarze Ω,

$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \partial^2 / \partial x_k^2$ – operator Laplace'a.

Strumień na brzegach obszaru opisuje wtedy równanie:

$$t = A_t u = -\partial_\nu u = -\nu \nabla u, \tag{3}$$

z warunkiem brzegowym:

$$t(x) = t_\Gamma(x), \quad x \in \Gamma_t \subset \Omega,$$

gdzie:

∇ – gradient poszukiwanej funkcji u,

ν – wektor normalny skierowany na zewnątrz obszaru,

x – n-wymiarowy wektor,
$\mathrm{d}x$ – oznacza $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ (lub $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$),
$A_t = -\nu \cdot \nabla$ – operator brzegowy,
$\partial / \partial x_k$ – pochodna cząstkowa oznaczana jako ∂_k .

Teoretyczne podstawy MEB Fouriera przedstawiono w pracy [1], a skrótowy ich opis w [3]. W niniejszym artykule zostaną podane jedynie niezbędne definicje i twierdzenia konieczne do przedstawienia procesu obliczania całek osobliwych w przestrzeni Fouriera.

Transformacja Fouriera (n-wymiarowa):

$$F(u) = \hat{u}, \qquad u \in L_1(R^n), \qquad i = \sqrt{-1}$$

jest zdefiniowana jako:

$$\hat{u}(\hat{x}) = \int_{R^n} u(x) e^{-i<x,\hat{x}>} dx, \qquad < x, \hat{x} > = \sum_{k=1}^{n} x_k \hat{x}_k \,. \tag{4}$$

Podstawą metody MEB Fouriera są dwa twierdzenia:

Twierdzenie Parsevala:

$$\int_{R^n} \phi(x) u(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{\phi}(-\hat{x}) \hat{u}(\hat{x}) d\hat{x}, \quad x, \hat{x} \in R^n \,. \tag{5}$$

Twierdzenie o splocie w przestrzeni Fouriera w postaci:

$$\int_{R^n} \phi(y) u(x-y) dy \qquad \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} \qquad \hat{\phi}(\hat{x}) \hat{u}(\hat{x}) \,. \tag{6}$$

Jeśli iloczyn skalarny zostanie zapisany w postaci $\langle a, b \rangle = \int_{R^n} a(x) b(x) dx$, zaś splot jako $a * b = \int_{R^n} a(y) b(x-y) dy$, to wzory (5,6) mają odpowiednio postać (7, 8):

$$\langle \phi(x), u(x) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \hat{\phi}(-\hat{x}), \hat{u}(\hat{x}) \rangle, \tag{7}$$

$$\phi(x) * u(x) \quad \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \quad \hat{\phi}(\hat{x})\hat{u}(\hat{x}) \; . \tag{8}$$

Transformacja układu równań różniczkowych cząstkowych do przestrzeni Fouriera przekształca operator różniczkowy $P(\partial)$ w wyrażenie algebraiczne $\hat{P}(\hat{x})$:

$$\Delta u(x) = -f(x) \;\xleftrightarrow{F}\; -\left|\hat{x}\right|^{2} \hat{u}(\hat{x}) = -\hat{f}(\hat{x}) \,, \tag{9}$$

gdzie:

$$\hat{P} = -\left|\hat{x}\right|^{2} = -\sum_{k}^{n} \hat{x}_{k}^{2} \; . \tag{10}$$

Fundamentalne rozwiązanie w przestrzeni Fouriera sprowadza się do:

$$f(x) = \delta(x) \xleftrightarrow{F} \hat{f}(\hat{x}) = 1 \, . \tag{11}$$

Zgodnie z (11) rozwiązanie:

$$\Delta U(x) = -\delta(x) \;\xleftrightarrow{F}\; -\left|\hat{x}\right|^{2} \hat{U}(\hat{x}) = -1 \,, \tag{12}$$

po transformacji do przestrzeni Fouriera sprowadza się do wyznaczenia odwrotności $\hat{P}$:

$$\hat{U}(\hat{x}) = \frac{1}{\left|\hat{x}\right|^{2}} \; . \tag{13}$$

Takie podejście może być zastosowane do wszystkich równań różniczkowych liniowych ze stałymi współczynnikami. Rozwiązanie fundamentalne dla takich równań przestrzeni Fouriera jest zatem zawsze znane [1].

Dla elementów prostych, wektor normalny ν^{k} jest lokalnie niezależny od x, wobec czego:

$$\mathrm{A}_{t}^{k} U = -\nu^{k} \cdot \nabla \mathrm{U} \;\xleftrightarrow{F}\; \hat{\mathrm{A}}_{t}^{k} \hat{U} = -\hat{\nu}^{k} \cdot i\hat{x}\hat{U} \tag{14}$$

$$\mathrm{A}_{t}^{j} \mathrm{A}_{t}^{k} U = \nu^{j} \cdot \nabla(\nu^{k} \cdot \nabla \mathrm{U}) \;\xleftrightarrow{F}\; \hat{\mathrm{A}}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{j}} \hat{\mathrm{A}}_{t}^{k} \hat{U} = \hat{\nu}^{j} \cdot i\hat{x}(\hat{\nu}^{k} \cdot i\hat{x})\hat{U}$$

Klasyczna MEB bazuje na formułach Greena tj. na znanym rozwiązaniu fundamentalnym. MEB Fouriera przedstawiona w pracy [1] jest szczególnie interesująca w przypadku braku takiego rozwiązania.

Ostatecznie MEB Fouriera jest przetransformowaną do przestrzeni Fouriera metodą MEB Galerkina [6] (z zastosowaniem fundamentalnych twierdzeń teorii dystrybucji [7]) i sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych postaci [1, 4]:

$$\sum_i K_u^{ji} u^i = F_u^j + \sum_i H_u^{ji} t^i - \sum_i G_u^{ji} u^i \,, \tag{15}$$

gdzie współczynniki są zdefiniowane w przestrzeni Fouriera wzorami:

$$\begin{cases} F_u^j = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \hat{\phi}_t^j(-\hat{x}),\, \hat{f}(\hat{x})\hat{U}(\hat{x}) \right\rangle \\ H_u^{ji} = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \hat{\phi}_t^j(-\hat{x}), \hat{\phi}_t^i(\hat{x})\hat{U}(\hat{x}) \right\rangle \\ G_u^{ji} = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \hat{\phi}_t^j(-\hat{x}), \hat{\phi}_u^i(\hat{x})\hat{A}_t^i\hat{U}(\hat{x}) \right\rangle \\ K_u^{ji} := \dfrac{1}{(2\pi)^n} \left\langle \hat{\phi}_t^j(-\hat{x}), \hat{\phi}_u^i(\hat{x}) \right\rangle \end{cases}, \tag{16}$$

Znane i nieznane wartości u są aproksymowane przez sumy wielomianów funkcji testowych ϕ_u^i ze współczynnikami u^i postaci:

$$u(x) \approx \sum_i^{N_u} u^i \phi_u^i(x) \,. \tag{17}$$

Funkcje testowe względem *u* powinny być co najwyżej liniowe.

3. PODSTAWY OBLICZEŃ SYMBOLICZNYCH W MATLABIE

Symbolic Math ToolBox [8] w Matlabie dostarcza narzędzi do wykonywania obliczeń na wyrażeniach symbolicznych [2]. Pakiet wyposażony jest w funkcje do symbolicznego wyznaczania granic, rozwiązywania równań, różniczkowania i całkowania.

Symboliczne oprogramowanie definiuje nowy typ zwany „obiektem symbolicznym" (ang. symbolic object). Jest to struktura danych, która zawiera symbol przedstawiony w postaci łańcucha. Obiekty te reprezentują zmienne symboliczne, całe wyrażenia i macierze. Obliczenia symboliczne wykonywane są na bazie pakietu Maple.

Pakiet do obliczeń symbolicznych pozwala realizować obliczenia symboliczne poprzez odpowiednie zdefiniowanie symbolicznych wyrażeń i opero-wanie na nich za pomocą funkcji wywoływanych podobnie jak zwykłe funkcje Matlaba.

Polecenia sym i syms deklarują zmienne i wyrażenia symboliczne.

Na przykład aby zrealizować symboliczne obliczenia dla funkcji kwadratowej postaci: $f = ax^2 + bx + c$ należy zadeklarować zmienne w następujący sposób:

a = sym('a')
b = sym('b')
c = sym('c')
x = sym('x')

lub jednym poleceniem:

syms a b c x

Usunięcie zmiennych z pamięci Maple nie jest jednoznaczne z usunięciem zmiennych z przestrzeni roboczej Matlaba. Na przykład jeśli *x* jest zadeklarowane jako zmienna typu *real* za pomocą polecenia:

syms x real

to *x* jest obiektem symbolicznym w przestrzeni Matlaba oraz dodatnią zmienną typu *real* dla Maple. Polecenie:

syms x unreal

znosi deklarację typu *real* dla zmiennej *x*, a polecenie:

maple restart

usuwa wszystkie deklaracje zmiennych z przestrzeni Maple.
Polecenie:

clear x

usuwa *x* tylko z przestrzeni roboczej Matlaba.

Na przykład dla zmiennej *x* typu *real*, polecenie:

syms x

bez usunięcia *x* z jądra Maple, dla Matlaba ciągle oznacza, że *x* jest dodatnią zmienną typu *real*.

3.1. Całkowanie symboliczne

Jeśli *f* jest wyrażeniem symbolicznym to:

int(f)

znajduje inne wyrażenie symboliczne F, takie że jego pochodna:

diff(F) = f.

Oznacza to, że wynikiem wywołania funkcji *int(f)* jest symboliczna postać całki nieoznaczonej z funkcji *f*.

Polecenie:

int(f, v)

oznacza, że wyrażenie *f* ma być całkowane względem symbolicznej zmiennej *v*.

Całkowanie symboliczne jest trudnym zadaniem obliczeniowym. Całka *F* może nie istnieć w ogóle lub jej postać może być wyrażona za pomocą skomplikowanej funkcji. Całka *F* może istnieć, ale oprogramowanie nie będzie w stanie jej wyznaczyć lub może potrzebować zbyt wiele czasu i pamięci na realizację obliczeń. Tym niemniej dla wielu zadań, Matlab jest w stanie wyznaczyć symboliczną postać całki a w razie niepowodzenia zwracany jest po prostu wynik postaci wyrażenia wejściowego: *int(f).*

Możliwe jest również symboliczne wyznaczanie całek oznaczonych.

Polecenia:

int(f, a, b)

oraz

int(f, v, a, b)

wyznaczają symboliczne wyrażenia określające odpowiednio całki postaci:

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

$$\int_a^b f(v)dv\,.$$

3.2. Całkowanie z parametrami rzeczywistymi

Jedną z subtelności obliczeń symbolicznych są różne dziedziny parametrów całkowania.

Na przykład, jeśli *a* jest zadeklarowane jako dodatnia zmienna typu *real*, to wyrażenie e^{-ax^2} jest określone dodatnimi wartościami krzywej w kształcie dzwonu zbieżnej do 0 przy $x \to \pm 1$.

Na przykład dla *a = 1/2* mamy:

syms x
a = sym(1/2);
*f = exp(−a * x^2);*

Jednak przy obliczaniu całki $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$, bez określenia typu zmiennej *a*, Matlab założy, że *a* jest liczbą zespoloną i dlatego zwróci wynik w postaci zespolonej. W przypadku kiedy *a* ma być dodatnią liczbą typu *real*, całka powinna być obliczana za pomocą następujących poleceń:

syms a positive;
syms x;
*f = exp(−a * x^2);*
int(f, x,−inf, inf)

W wyniku otrzymuje się:

*ans = 1/(a)^(1/2) * pi^(1/2).*

W celu wyznaczenia całki dla dowolnej wartości rzeczywistej zmiennej *a* (nie koniecznie dodatniej), parametr *a* należy zdefiniować następująco:

syms a real
*f = exp(−a * x^2);*
F = int(f, x,−inf, inf)

4. CAŁKOWANIE SYMBOLICZNE W RÓWNANIU POISSONA

Praktyczne obliczenia całek osobliwych zostaną pokazane na przykładzie rozwiązania równania Poissona, zdefiniowanego na dwuwymiarowym obszarze $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, z wewnętrznym, stacjonarnym źródłem ciepła *f.* Temperatura na brzegu tego obszaru ma wartość 0. Przy tych warunkach, problem Dirichleta prowadzi do równania Poissona postaci:

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad x \in \Omega \tag{18}$$

$$u(x) = u_\Gamma = 0, \quad x \in \Gamma .$$

Brzeg $\partial\Omega$ został podzielony na 8 elementów [2].

Rozwiązaniem fundamentalnym jest tu funkcja:

$$U(x) = U(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ , \tag{19}$$

gdzie:

$$U(x-y) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \ . \tag{20}$$

Przy warunku u = 0 układ równań liniowych (15) redukuje się do układu:

$$0 = F_u^j + \sum_i H_u^{ji} t^i \ , \tag{21}$$

gdzie:

$$H_u^{ji} = \int_{\Gamma_x} \phi_t^j \int_{\Gamma_y} \phi_t^i U(x-y) d\Gamma_y d\Gamma_x \ , \tag{22}$$

$$F_u^j = \int_{\Gamma_x} \phi_t^j(x) \int_{\Omega} f(y) U(x-y) d\Omega_y d\Gamma_x \ . \tag{23}$$

Funkcje testowe dla tego przypadku w przestrzeni Fouriera mają postać [1]:

$$\hat{\phi}_t^1 = \frac{i}{\hat{x}_1 / 2}\left(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1\right)\frac{1}{2} = i\,\frac{(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1)}{\hat{x}_1} , \tag{24}$$

$$\hat{\phi}_t^2 = \frac{1}{2}\frac{i}{\hat{x}_1 / 2} e^{-i\hat{x}_1/2}\left(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1\right) = i\,\frac{(e^{-i\hat{x}_1} - e^{-i\hat{x}_1/2})}{\hat{x}_1} , \tag{25}$$

$$\hat{\phi}_t^3 = \frac{i}{\hat{x}_2 / 2}\left(e^{-i\hat{x}_2/2} - 1\right)\frac{1}{2} e^{-i\hat{x}_1} = i\,\frac{(e^{-i\hat{x}_2/2} - 1)e^{-i\hat{x}_1}}{\hat{x}_2} . \tag{26}$$

Przy dyskretyzacji brzegu kwadratu jednostkowego ośmioma elementami, układ równań do rozwiązania jest postaci:

$$\sum_{i}^{8} t^i \left\langle \hat{\phi}_t^j(-\hat{x}), \hat{\phi}_t^i \hat{U} \right\rangle = -\left\langle \hat{\phi}_t^j(-\hat{x}), \hat{f}_\chi \hat{U} \right\rangle, \; j = 1,\ldots,8 \,. \tag{27}$$

Czyli np.:

$$\begin{aligned} H^{11} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\langle \hat{\phi}_t^1(-\hat{x}), \hat{\phi}_t^1(\hat{x}) \hat{U}(\hat{x}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{\left[i(e^{i\hat{x}_1/2} - 1) \right] \cdot \left[i(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1) \right]}{-\hat{x}_1 \hat{x}_1 \left(-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 \right)} dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{28}$$

Elementy leżące na głównej przekątnej macierzy układu, są określone całkami osobliwymi, wyznaczanymi symbolicznie w Matlabie.

Aby wyznaczyć wartość H^{11} w przestrzeni Fouriera została wykorzystana tożsamość z [1]:

$$\int_{R^1} \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 \right)} d\hat{x}_2 = \frac{-1}{(2\pi)} \frac{\operatorname{sgn}(\hat{x}_1)}{2\hat{x}_1} \tag{29}$$

Oraz twierdzenie Parsevala (5) w postaci:

$$\int_{R^n} u_1(x) u_2(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{u}_1(-\hat{x}) \hat{u}_2(\hat{x}) d\hat{x} \tag{30}$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} H^{11} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{\left[i(e^{i\hat{x}_1/2} - 1) \right] \cdot \left[i(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1) \right]}{-\hat{x}_1 \hat{x}_1 \left(-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 \right)} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \\ &\int_{R^1} \frac{\left[(e^{i\hat{x}_1/2} - 1) \right] \cdot \left[(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1) \right]}{\hat{x}_1^{\;2}} \int_{R^1} \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 \right)} d\hat{x}_2 d\hat{x}_1 = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)} \int_{R} \left[(e^{i\hat{x}_1/2} - 1) \right] \cdot \left[(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1) \right] \frac{\operatorname{sgn}(\hat{x}_1)}{2\hat{x}_1^3} d\hat{x}_1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{2(2\pi)} \int_R \frac{\operatorname{sgn}(\hat{x}_1)}{\hat{x}_1^3} \left[(e^{i\hat{x}_1/2} - 1)\right] \cdot \left[(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1)\right] d\hat{x}_1 =$$

$$\overset{(25)}{=} \frac{-1}{2(2\pi)} \frac{1}{(2\pi)} \int_R F\left(\frac{\operatorname{sgn}(\hat{x}_1)}{\hat{x}_1^3}\right) F\left(\left[(e^{i\hat{x}_1/2} - 1)\right] \cdot \left[(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1)\right]\right) d\hat{x}_1 =$$

$$\overset{[1]}{=} \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_R \frac{2x_1^2}{2} (\ln|x_1| - \frac{3}{2}) F(\left[(e^{i\hat{x}_1/2} - 1)\right] \cdot \left[(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1)\right]) d\hat{x}_1$$

Listing 1 przedstawia kod źródłowy do symbolicznych obliczeń dwóch przykładowych wartości całek osobliwych znajdujących się na głównej przekątnej macierzy.

Listing 1. Obliczanie całek w przestrzeni Fouriera

```
%Rozbite na poszczególne kroki
%obliczenia calek h11, h22
clear all
clear maple
syms x w
% disp('Transformata Fouriera sgn(x)/x^3:')
fouriersignum=trsgn(w)

% disp('Transformata Fouriera fi1(x)fi1(-x):')
fourierfi1fi1=simplify(fourier(fi1(x)*fi1(-x)))
disp('Transformata Fouriera iloczynu signum i fi1*fi1:')
f=trsgn(w).*fourierfi1fi1
disp('Calka z iloczynu transformat:')
f=simplify(int(f,-inf,inf)./(2.*pi))./(2.*pi)./2
H11=subs(f)

% disp('Transformata Fouriera fi2(x)fi2(-x):')
fourierfi2fi2=simplify(fourier(fi2(x)*fi2(-x)))
disp('Transformata Fouriera iloczynu signum i fi2*fi2:')
f=trsgn(w).*fourierfi2fi2
disp('Calka z iloczynu transformat:')
f=simplify(int(f,-inf,inf)./(2.*pi))./(2.*pi)./2
H22=subs(f)
```

Do obliczeń wykorzystano pomocnicze funkcje *trsgn*, *fi1* i *fi2*, których kod źródłowy pokazano na Listingu 2.

Listing 2. Kod pomocniczych funkcji

```
function f = trsgn(x)
%transformata signum/x^3
f=x.*x.*(log(abs(x))-3./2);
end

function f=fi1(x1)
%bez dzielenia przez x1 (uwzględnione w sgn)
f=1i.*(exp(-1i.*x1./2)-1);

function f=fi2(x1)
%bez dzielenia przez x1 (uwzględnione w sgn)
f=1i.*(exp(-1i.*x1)-exp(-1i.*x1./2));
```

Proces obliczeń w przestrzeni Fouriera przedstawia zrzut ekranu zaprezentowany na rysunku 1.

```
fouriersignum =

w^2*(log(abs(w)) - 3/2)


fourierfi1fi1 =

2*pi*(dirac(w - 1/2) + dirac(w + 1/2) - 2*dirac(w))

Transformata Fouriera iloczynu signum i fi1*fi1:

f =

2*pi*w^2*(log(abs(w)) - 3/2)*(dirac(w - 1/2) + dirac(w + 1/2) - 2*dirac(w))

Calka z iloczynu transformat:

f =

-(log(2)/2 + 3/4)/(4*pi)


H11 =

   -0.0873
```

Rys. 1. Zrzut ekranu z obliczeniami w przestrzeni Fouriera przykładowej całki osobliwej H^{11}

Z rysunku 1 wynika, że ostatecznie całka H^{11} z iloczynu transformat w Matlabie (symbolicznie) wynosi:

$$-(\log(2)/4 + 3/8)/(2*pi) = -1/(16\pi)(2\ln 2+3),$$

co daje przybliżoną wartość rzeczywistą: H^{11} = -0.0873.

Uproszczony do minimum proces obliczeniowy z Listingu 1 przedstawia Listing 3.

Listing 3. Obliczenia symboliczne w najkrótszym z zapisów

```
%Obliczenia symboliczne całek w przestrzeni Fouriera
clear all
clear maple
syms x x1 x2 t w
%H11:
f=trsgn(w).*simplify(fourier(fi1(x)*fi1(-x)));
H11=simplify(int(f,-inf,inf)./(2.*pi))./(2.*pi)./2;
H11=subs(H11)
%H22:
f=trsgn(w).*simplify(fourier(fi2(x)*fi2(-x)));
H22=simplify(int(f,-inf,inf)./(2.*pi))./(2.*pi)./2;
H22=subs(H22)
```

Dla rozważanego przypadku, wszystkie elementy przekątniowe H^{ii}, i = 1,...,8 mają taką samą wartość jak H^{11} wyznaczaną w analogiczny sposób.

Obliczając wartości całek osobliwych H^{ii} w tradycyjnej metodzie MEB stosuje się metody numeryczne [5], które zastosowane do analizowanego przypadku dały dokładnie takie same rezultaty. Wyznaczanie całek osobliwych metodami numerycznymi zostało dokładnie omówione w pozycji [3].

Kolejnym problemem jest proces obliczeniowy całek leżących poza główną przekątną. Są to już całki nieosobliwe, a ich wartości wyznacza się numerycznie.

5. WNIOSKI

Metoda elementów brzegowych Fouriera jest o tyle interesująca, że można ją zastosować do rozwiązywania układów równań różniczkowych cząstkowych, dla których nie jest znana postać rozwiązania fundamentalnego. Niestety implementacja Fourier BEM jest znacznie trudniejsza niż klasycznej metody. W artykule pokazano możliwość wykorzystania obliczeń symbolicznych pakietu Matlab do wyznaczania współczynników macierzy stanu określonych za pomocą całek osobliwych.

LITERATURA

1. Duddeck F.: Fourier BEM. Generalization of Boundary Element Method by Fourier Transform. Springer. Berlin, 2002.
2. Łukasik E., Pańczyk B., Sikora J, Methods of Optimisation and Data Analysis. Selected Issues, scientific editors: Kesra Nermend and Tomasz Komorowski, chapter 8 : Matlab symbolic integration for Galerkin BEM, str. 137-155, Szczecin 2010.
3. Łukasik E., Pańczyk B., Sikora J., Całkowanie numeryczne i analityczne na przykładzie metody elementów brzegowych Galerkina, Metody informatyki Stosowanej. 2011, nr 3, s. 91-104.
4. Pańczyk B., Sikora J., "Teoretyczne podstawy metody elementów brzegowych Fouriera", IAPGOS, zeszyt 1/2012.
5. Sikora Jan, "Podstawy metody elementów brzegowych", wydawnictwo książkowe Instytutu Elektrotechniki, Warszawa 2009.
6. Sutradhar A., Paulino G.H., Gray L. J., "Symmetric Galerkin Boundary Element Method", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.
7. Zagórski A., "Metody matematyczne fizyki", Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.
8. http://www.mathworks.com

Rękopis dostarczono dnia 11.08.2012 r.

SYMBOLIC INTEGRATION FOR FOURIER BOUNDARY ELEMENT METHOD

Edyta ŁUKASIK, Beata PAŃCZYK, Jan SIKORA

ABSTRACT *The traditional Boundary Element Method (BEM) allows for the solution of the problem, but only if there is a known fundamental solution. A more universal approach the Fourier BEM offers. It implements, under certain assumptions, calculations without knowing the fundamental solution. The equivalence of both methods is shown in. Coefficients of the final system of linear equations are determined in the Fourier space. The paper presents the implementation of the symbolic integration in MATLAB to determine the singular integrals in Fourier BEM.*

Keywords: *Fourier Boundary Element Method, Galerkin Boundary Element Method, symbolic integration*

Dr Edyta ŁUKASIK ukończyła studia matematyczne na UMCS w Lublinie. Tytuł doktora uzyskała na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki UMCS w Lublinie w roku 2007. Tytuł rozprawy doktorskiej: Metody iteracyjne dla nieliniowych regularnie osobliwych układów równań.

Od 1998 roku pracownik naukowy Politechniki Lubelskiej. W latach 1998-2007 zatrudniona na stanowisku asystenta, a od maja 2007 na stanowisku adiunkta w Instytucie Informatyki PL. Obszar zainteresowań naukowych to przede wszystkim języki programowania i algorytmizacja, struktury danych, metody numeryczne i metody optymalizacji.

Dr Beata PAŃCZYK ukończyła studia matematyczne na UMCS w Lublinie. W latach 1989-2011 pracownik naukowy (asystent, adiunkt) w Instytucie Informatyki Politechniki Lubelskiej. Tytuł doktora uzyskała w roku 1996 na Wydziale Elektrycznym PL. Temat rozprawy doktorskiej: Konstrukcja obrazu rozkładu właściwości fizycznych obiektu metodą Impedancyjnej Tomografii Komputerowej. Od roku 2011 na stanowisku starszego wykładowcy.

Obszar zainteresowań dydaktycznych i naukowych to metody numeryczne i języki programowania.

Prof. dr hab. inż. Jan SIKORA ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej. W ciągu 34 lat pracy zawodowej zdobył wszystkie stopnie, tytuły i stanowiska łącznie ze stanowiskiem profesora zwyczajnego na swojej macierzystej uczelni.

Z Instytutem Elektrotechniki w Warszawie jest związany od 1998 roku. Od roku 2008 pracuje na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej w Katedrze Elektroniki. W latach 2001-2004 pracował jako Senior Research Fellow w University College London w Grupie Tomografii Optycznej Prof. S. Arridge’a.

Jego zainteresowania naukowe skupiają się wokół numerycznych metod pola elektromagnetycznego.