

Piotr KOZIELSKI

# WYKORZYSTANIE FILTRU CZĄSTECZKOWEGO W PROBLEMIE IDENTYFIKACJI UKŁADÓW AUTOMATYKI

**STRESZCZENIE**      *W artykule przedstawiono sposób identyfikacji parametrycznej obiektów nieliniowych zapisanych w przestrzeni stanu. Identyfikacja wykorzystuje metodę największej wiarygodności (ML), z zastosowaniem filtra cząsteczkowego i algorytmu oczekiwanie-maksymalizacja (EM).*

**Słowa kluczowe:** *identyfikacja, metoda największej wiarygodności, filtr cząsteczkowy, oczekiwanie-maksymalizacja*

## 1. WSTĘP

---

Tworzenie modeli obiektów ma bardzo duże znaczenie w różnych dziedzinach nauki, takich jak statystyka, ekonometria czy automatyka. Nie jest to także dziedzina zamknięta, gdyż wciąż w niektórych jej obszarach nadal są prowadzone badania, jak np. identyfikacja obiektów nieliniowych [8].

W pierwszym rozdziale opisano zasadę działania filtra cząsteczkowego. Drugi rozdział został poświęcony „wygładzaczowi cząsteczkowemu”. Trzeci rozdział przedstawia metodę największej wiarygodności wykorzystaną do procesu identyfikacji. W czwartym rozdziale zamieszczono informacje dotyczące działania algorytmu oczekiwanie-maksymalizacja.

---

**mgr inż. Piotr KOZIELSKI**  
e-mail: piotr.kozierski@gmail.com

Wydział Elektryczny,  
Politechnika Poznańska

## 2. FILTR CZĄSTECZKOWY

Czytelnika chcącego dokładniej zrozumieć ideę i zasadę działania filtru cząsteczkowego odsyła się do [7], gdzie podstawy dotyczące tych algorytmów zostały szeroko opisane. Tutaj przedstawiono temat w stopniu minimalnym, wymaganym do poprawnego przedstawienia tematu.

Zadaniem filtru cząsteczkowego jest estymacja zmiennej stanu w modelu, w związku z czym w literaturze jest on często porównywany z filtrem Kalmana. Sama filtracja jest zaś przeprowadzana na podstawie informacji o sygnale wyjściowym z obiektu.

Aby skorzystać z filtru cząsteczkowego muszą być spełnione pewne założenia:

a) model obiektu można przedstawić w postaci ukrytego modelu Markowa pierwszego rzędu (pomija się wpływ sygnału sterującego w celu uproszczenia zapisu):

$$\begin{aligned}x_k &= f(x_{k-1}, v_{k-1}, \theta) \\y_k &= g(x_k, n_k, \theta)\end{aligned}\tag{1}$$

czyli  $x_k$  zależy tylko od wartości stanu w chwili poprzedniej, zaś wyjście jest zależne od stanu w chwili bieżącej.  $v$  jest szumem wewnętrznym, zaś  $n$  – szumem pomiarowym,

b) znany jest model przejścia (ang. *System model*)  $p(x_k | x_{k-1})$ , czyli prawdopodobieństwo wystąpienia stanu  $x_k$  pod warunkiem wystąpienia stanu  $x_{k-1}$  w poprzedniej chwili,

c) znany jest model pomiarowy (ang. *Measurement model*)  $p(y_k | x_k)$ ,

d) znana jest początkowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa (fgp)  $p(x_0 | y_0) = p(x_0)$ .

Filtr cząsteczkowy opiera się na regule Bayesa

$$p(x_k | Y_k) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1})}{p(y_k | Y_{k-1})}\tag{2}$$

gdzie  $p(y_k | x_k)$  to wiarygodność (zdefiniowana w postaci modelu pomiarowego),  $p(y_k | Y_{k-1})$  to funkcja normująca (ang. *evidence*),  $p(x_k | Y_{k-1})$  to fgp

apriori, a  $p(x_k | Y_k)$  to fgp aposteriori, czyli rozkład który chcemy uzyskać, aby móc obliczyć oczekiwaną wartość zmiennej stanu w chwili  $k$

$$\hat{x}_k = E[x_k | Y_k] = \int x_k p(x_k | Y_k) dx_k. \quad (3)$$

W zapisie przyjęto, że

$$Y_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}. \quad (4)$$

Prior jest wyrażony wzorem:

$$p(x_k | Y_{k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_{k-1}) dx_{k-1} \quad (5)$$

przy czym pierwszy czynnik pod całką jest to model przejścia, zaś drugi to po prostu fgp aposteriori z chwili poprzedniej.

Kluczowym elementem tej metody jest przedstawienie rozkładu aposteriori  $p(x_k | Y_k)$  za pomocą  $N$  losowo wybranych cząsteczek, z których każda ma odpowiednią wagę. Na podstawie tej wiedzy są obliczane estymaty [3]. Wykorzystywane jest przy tym mocne prawo wielkich liczb (mpwl), dzięki któremu przy odpowiednio dużej liczbie cząsteczek estymator jest zbieżny do ciągłej reprezentacji rozkładu aposteriori.

Algorytm *Bootstrap Filter* opisany przez Gordona, Salmonda i Smitha w [6] jest jednym z pierwszych przykładów filtru cząsteczkowego [9, 10, 11]. W metodzie tej wyróżnia się dwa kroki: predykcję i aktualizację.

Zakłada się, że znany jest zbiór  $N$  próbek z fgp  $p(x_{k-1} | Y_{k-1})$ . Krok predykcyjny polega na przepuszczeniu każdej z próbek przez model przejścia, czyli wylosowaniu  $N$  nowych próbek  $x_k^*(i)$  z rozkładu zależnego od wartości stanu w chwili poprzedniej  $x_{k-1}(i)$ .

Aktualizacja polega na obliczeniu znormalizowanych wag dla każdej próbki

$$q_k(i) = \frac{p(y_k | x_k^*(i))}{\sum_{j=1}^N p(y_k | x_k^*(j))} \propto p(y_k | x_k^*(i)) \quad (6)$$

czyli poszczególne wagi są zależne tylko od modelu pomiarowego, a ponieważ wyjście obiektu jest dane, podobnie jak wartości poszczególnych próbek, które

przed chwilą zostały przepuszczone przez model przejścia, ten krok w praktyce sprowadza się do przypisania wadze  $q_k(i)$  odczytanej wartości z  $p(y_k | x_k)$ .

We wzorze (6) symbol  $\propto$  oznacza „wprost proporcjonalne”, przy czym wiadomo, że

$$\sum_{i=1}^N q_k(i) = 1. \quad (7)$$

Poszczególne próbki  $x_k^*(i)$  wraz z wagami  $q_k(i)$  niosą informacje o rozkładzie dyskretnym i są następnie wykorzystane do powtórnego próbkowania (ang. *resampling*) wszystkich cząsteczek. Należy wylosować  $N$  nowych próbek  $x_k(i)$ , przy czym szansa, że będzie to dokładnie wartość  $x_k^*(i)$  wynosi  $q_k(i)$

$$\Pr\{x_k(j) = x_k^*(i)\} = q_k(i) \quad (8)$$

Algorytm Bootstrap jest czasami nazywany w literaturze jako *Sampling-Importance-Resampling* (SIR), jednak w istocie różni się on od typowego SIR odgórnym wyborem funkcji ważności [1, 3].

### 3. WYGŁADZACZ CZĄSTECZKOWY

Tak jak celem działania filtru cząsteczkowego jest estymacja rozkładu brzegowego (2) [2], tak zadaniem wygładzacza cząsteczkowego (ang. *particle smoother*) jest estymacja rozkładu

$$p(x_{k-1} | Y_m) = p(x_{k-1} | Y_{k-1}) \int \frac{p(x_k | x_{k-1}) p(x_k | Y_m)}{p(x_k | Y_{k-1})} dx_k \quad (9)$$

przez co wygładzanie jest trudniejsze od filtracji i korzystanie wprost z (9) jest możliwe tylko dla obiektów dyskretnych zapisanych w przestrzeni stanu, lub dla obiektów liniowych niskich rzędów [4].

Rozwijając zapis

$$Y_m = \{y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_m\} \quad (10)$$

widać, że wygładzanie ma na celu znalezienie wartości zmiennej stanu w chwili, w której znane są późniejsze wartości wyjścia.

W szczególnym przypadku gdy  $m = k - 1$ , wygładzacz stanie się po prostu filtrem.

W równaniu (9) mianownik pod całką to fgp apriori wyrażona wzorem (5). Wyrażenie przed całką to fgp aposteriori, którą można otrzymać poprzez wykorzystanie filtru cząsteczkowego. Pierwszy czynnik w liczniku pod całką to model przejścia, zaś drugi czynnik można wyrazić tym samym wzorem (9) po zaktualizowaniu chwili czasowej. Należy w taki sposób postępować aż do momentu, w którym  $p(x_k | Y_m) = p(x_k | Y_k)$ . Takie rekurencyjne podejście jest jednym z dwóch opisanych w [5].

Podobnie jak w filtrze cząsteczkowym, także w tym przypadku konkretna wartość zmiennej stanu jest obliczana jako wartość oczekiwana, co przy wykorzystaniu cząsteczek sprowadza się do wzoru

$$p(x_k | Y_m) = E[x_k | Y_m] \approx \sum_{i=1}^N w_k(i) \cdot x_k(i). \quad (11)$$

Aby otrzymać wygładzone wartości zmiennej stanu, trzeba najpierw uruchomić normalny filtr cząsteczkowy dla wszystkich kroków symulacji  $k = 1, \dots, m$  i zapamiętać poszczególne cząsteczki  $x_k(i)$  oraz wagi  $q_k(i)$ .

Wygładzanie nie powoduje zmiany wartości poszczególnych cząsteczek, a jedynie wpływa na wartości ich wag wykorzystując także informację z późniejszych chwil czasowych. Obliczanie kolejnych wag następuje „od końca” – dla ostatniej chwili czasowej  $m$ , poszczególne wagi przyjmuje się równe tym, otrzymanym na podstawie działania filtru

$$w_m(i) = q_m(i). \quad (12)$$

Następnie dla malejącego kroku czasowego  $k = m, m - 1, \dots, 2$  oblicza się poszczególne wagi

$$w_{k-1}(i) = q_{k-1}(i) \frac{\sum_{j=1}^N w_k(j) \cdot p(x_k(j) | x_{k-1}(i))}{\sum_{h=1}^N q_{k-1}(h) \cdot p(x_k(j) | x_{k-1}(h))} \quad (13)$$

które należy zapamiętać, aby na końcu, korzystając z (11) obliczyć wygładzone wartości zmiennej stanu. Należy przy tym pamiętać, że – podobnie jak w przypadku wag  $q_k(i)$  – również wagi  $w_k(i)$  mają tę właściwość, że ich suma musi być równa jedności, w związku z czym dobrze jest po obliczeniu wszystkich wag w  $k$ -tym kroku dokonać normalizacji.

Aby porównać działanie filtru cząsteczkowego oraz wygładzacza cząsteczkowego, zasymulowano obiekt dany równaniami

$$x_k = 0,8x_{k-1} + \frac{\exp(0,1x_{k-1})}{0,1 + x_{k-1}^2} v_{k-1} \quad (14)$$

$$y_k = x_k + n_k$$

gdzie szum wewnętrzny ma rozkład normalny  $v \sim N(0; 0,2)$  oraz szum pomiarowy także ma rozkład normalny  $n \sim N(0; 0,1)$ .

W tabeli 1 przedstawiono wyniki symulacji dla 3 różnych symulacji testowych oraz 3 różnych wartości  $N$  (liczba próbek). Wyniki obejmują czas symulacji  $t$  oraz średni kwadrat błędu pomiędzy wartością rzeczywistą i estymowaną, którą można zapisać jako

**TABELA 1**

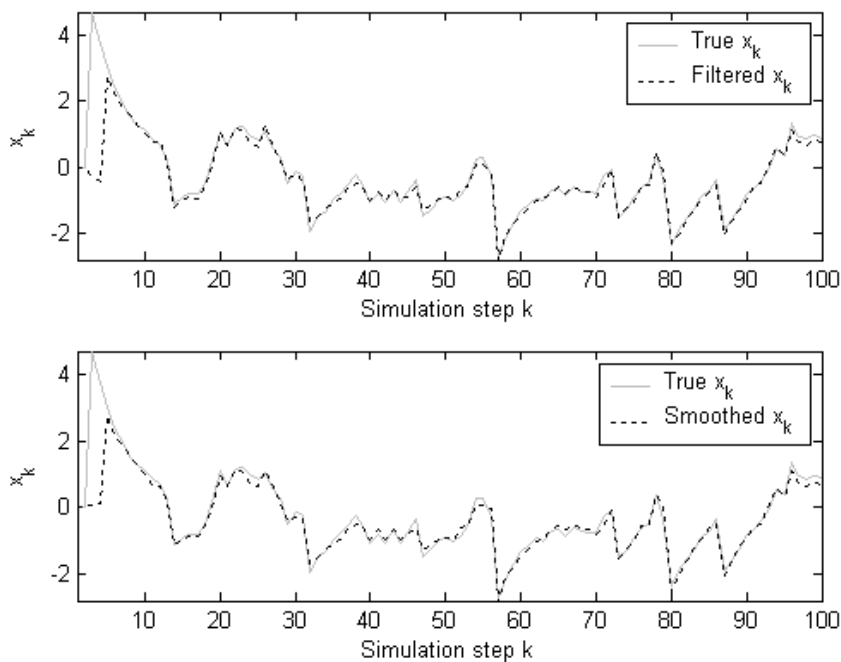
Porównanie działania filtru cząsteczkowego i wygładzacza cząsteczkowego dla różnej liczby cząsteczek  $N$  oraz różnej długości symulacji  $m$

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$
$m = 100$	$\delta_F = 0,453$ $\delta_S = 0,368$ $t = 5,7 \text{ s}$	$\delta_F = 0,435$ $\delta_S = 0,377$ $t = 21,5 \text{ s}$	$\delta_F = 0,433$ $\delta_S = 0,363$ $t = 126,4 \text{ s}$
$m = 200$	$\delta_F = 0,016$ $\delta_S = 0,018$ $t = 11,6 \text{ s}$	$\delta_F = 0,016$ $\delta_S = 0,018$ $t = 43,0 \text{ s}$	$\delta_F = 0,016$ $\delta_S = 0,018$ $t = 257,3 \text{ s}$
$m = 500$	$\delta_F = 0,086$ $\delta_S = 0,086$ $t = 28,8 \text{ s}$	$\delta_F = 0,058$ $\delta_S = 0,056$ $t = 105,6 \text{ s}$	$\delta_F = 0,054$ $\delta_S = 0,057$ $t = 635,7 \text{ s}$

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^m (x_k - \hat{x}_k)^2}{m} \quad (15)$$

gdzie  $m$  to długość symulacji testowej,  $x_k$  to prawdziwa wartość zmiennej stanu w  $k$ -tej iteracji, zaś  $\hat{x}_k$  to estymowana wartość zmiennej stanu w  $k$ -tej iteracji.

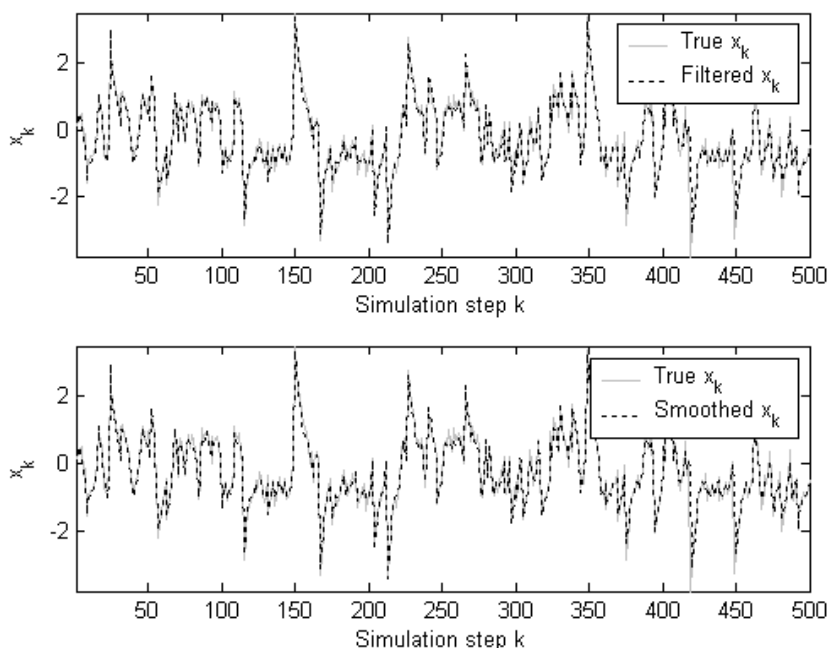
Wynik działania filtru cząsteczkowego zapisano jako  $\delta_F$ , zaś wynik wygładzania jako  $\delta_S$ . Na rysunku. 1 przedstawiono wynik symulacji dla  $N = 100$  i  $m = 100$ , a na rysunku 2 – dla  $N = 100$  i  $m = 500$ .



**Rys. 1. Wynik działania filtru cząsteczkowego i wygładzacza cząsteczkowego dla  $N = 100$  oraz  $m = 100$**

Porównując wyniki z tabeli 1 oraz rysunków 1 i 2 można stwierdzić, że pozytywny wynik wygładzania jest zauważalny tylko w przypadku błędnego działania filtru cząsteczkowego – na rysunku 1, na początku symulacji zaobserwowano duży błąd estymacji zmiennej stanu, który został zmniejszony przez wygładzacz, jednak w stosunkowo małym stopniu.

Należy także zwrócić uwagę na czas symulacji – doskonale widać, że  $t$  jest liniowo zależny od liczby kroków symulacji  $m$ , oraz wprost proporcjonalny do kwadratu liczby próbek  $N$ . Powoduje to, że wygładzanie jest bardzo kosztowne obliczeniowo, co przy uzyskanych wynikach stawia pod znakiem zapytania sens jego wykorzystywania.



**Rys. 2.** Wynik działania filtru cząsteczkowego i wygładzacza cząsteczkowego dla  $N = 100$  oraz  $m = 500$

Można jednak przyjąć, że w przypadku braku informacji o modelu przejścia i modelu pomiarowym obiekcie (do czego dochodzi m.in. przy problemie identyfikacji) wynik działania wygładzacza cząsteczkowego będzie lepszy niż w przedstawionym, idealnym przypadku.

#### 4. ESTYMACJA METODĄ NAJWIĘKSZEJ WIARYGODNOŚCI

To podejście zakłada maksymalizację łącznej fgp (ang. *joint density*) obserwacji poprzez odpowiedni dobór parametrów:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} p(y_1, \dots, y_n) \quad (16)$$

przy czym łączną fgp można zdekomponować na



$$p(y_1, \dots, y_n) = p(y_1) \prod_{k=2}^n p(y_k | Y_{k-1}) \quad (17)$$

Ze względu na monotoniczność (16), problem maksymalizacji jest równoznaczny z problemem minimalizacji

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} -L(Y_n) \quad (18)$$

gdzie  $L(Y_n)$  to logarytmiczna postać prawdopodobieństwa (ang. *log-likelihood*)

$$L(Y_n) = \log p(Y_n) = \log p(y_1) + \sum_{k=2}^n \log p(y_k | Y_{k-1}) \quad (19)$$

kóra jest stosowana z powodu możliwości zastąpienia iloczynu sumą.

O ile wyznaczenie

$$p(y_k | Y_{k-1}) = \int p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1}) dx_k \quad (20)$$

jest możliwe poprzez wykorzystanie filtru cząsteczkowego, o tyle rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (18) jest bardziej problematyczne, ponieważ prócz (20) istnieje potrzeba obliczenia pochodnej

$$\frac{\partial}{\partial \theta} p(y_k | Y_{k-1}) \quad (21)$$

Jedno z rozwiązań polega na numerycznym obliczeniu wymaganej pochodnej. Inne podejścia zakładają rozwiązanie problemu bez potrzeby obliczenia pochodnej, np. poprzez zastosowanie metod optymalizacji Simplex. W tym artykule zostanie zaprezentowany algorytm Oczekiwanie-Maksymalizacja (ang. Expectation Maximisation – EM) polegający na obliczeniu przybliżenia ML.

## 5. ALGORYTM OCZEKIWANIE-MAKSYMALIZACJA

Algorytm jest iteracyjną metodą poszukiwania maksymalnej wartości  $L(Y_n)$  przy założeniu, że w każdym kolejnym kroku wartość log-likelihood rośnie.

Algorytm jest wykonywany tak długo, jak poprawa kolejnych wartości parametrów  $\theta_{t+1}$  daje efekty, a więc mogą pojawić się problemy z określeniem czasu działania algorytmu.

Kolejne kroki algorytmu są następujące [10]:

**Algorytm 1** (oczekiwanie-maksymalizacja)

1) Inicjalizacja algorytmu;  $t = 0$ , dobranie takiego  $\theta_0$ , aby  $L_t(Y_n)$  było skończone.

2) Oczekiwanie; obliczenie wartości  $Q(\theta, \theta_{t-1})$

3) Maksymalizacja; obliczenie

$$\theta_t = \arg \max_{\theta \in \Theta} Q(\theta, \theta_{t-1}) \quad (22)$$

4) Jeśli zmiana wartości  $Q$  jest zauważalna, to  $t = t + 1$  i przejście do kroku 2.

W przeciwnym wypadku zakończenie algorytmu.

W kroku 2 należy dokonać obliczeń korzystając ze wzoru

$$Q(\theta, \theta_{t-1}) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (23)$$

gdzie

$$I_1 = \int \log p(x_1) p_{t-1}(x_1 | Y_n) dx_1 \quad (24)$$

$$I_2 = \sum_{k=2}^n \iint \log p(x_k | x_{k-1}) p_{t-1}(x_k, x_{k-1} | Y_n) dx_{k-1} dx_k \quad (25)$$

$$I_3 = \sum_{k=1}^n \int \log p(y_k | x_k) p_{t-1}(x_k | Y_n) dx_k \quad (26)$$

Można obliczyć przybliżoną wartość  $Q(\theta, \theta_{t-1})$  stosując wzory:

$$I_1 \approx \sum_{i=1}^N w_1(i) \cdot \log p(x_1(i)) \quad (27)$$

$$I_2 \approx \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=2}^m q_{k-1}(i) w_k(j) \cdot p_{t-1}(x_k(j) | x_{k-1}(i))}{\sum_{h=1}^N w_{k-1}(h) \cdot p_{t-1}(x_k(j) | x_{k-1}(h))} \cdot \log p(x_k(j) | x_{k-1}(i)) \quad (28)$$

$$I_3 \approx \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m w_k(i) \cdot \log p(y_k | x_k(i)) \quad (29)$$

Należy zwrócić uwagę, że we wzorze (28) wartości prawdopodobieństwa modelu przejścia dotyczą zestawu parametrów  $\theta_{t-1}$ , z kolei pozostałe wartości prawdopodobieństwa nie są zależne od żadnego konkretnego wektora parametrów  $\theta$ , co jest związane z 3 krokiem Algorytmu 1 – maksymalizacją.

Maksymalizacja polega na znalezieniu takich parametrów modelu  $\theta$ , aby wyrażenie  $Q(\theta, \theta_{t-1})$  przyjęło maksymalną wartość. W ogólnym przypadku wyrażenie to jest nieliniową funkcją  $\theta$  i ekstremum musi zostać znalezione za pomocą odpowiedniej techniki.

Jedną z takich technik jest metoda gradientowa, w której wykorzystuje się pochodną cząstkową po parametrach z przybliżonej wartości  $Q(\theta, \theta_{t-1})$ :

$$\frac{\partial Q(\theta, \theta_{t-1})}{\partial \theta} \approx D_1 + D_2 + D_3 \quad (30)$$

$$D_1 = \sum_{i=1}^N w_1(i) \frac{\partial \log p(x_1(i))}{\partial \theta} \quad (31)$$

$$D_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=2}^m \frac{q_{k-1}(i) w_k(j) \cdot p_{t-1}(x_k(j) | x_{k-1}(i))}{\sum_{h=1}^N w_{k-1}(h) \cdot p_{t-1}(x_k(j) | x_{k-1}(h))} \cdot \frac{\partial \log p(x_k(j) | x_{k-1}(i))}{\partial \theta}}{\quad} \quad (32)$$

$$D_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m w_k(i) \frac{\partial \log p(y_k | x_k(k))}{\partial \theta} \quad (33)$$

Dzięki rozwiązaniu równania (30) i przyrównaniu do zera można znaleźć maksimum funkcji, jednakże nie jest to konieczne, ponieważ najważniejsze jest spełnienie warunku, aby wartość funkcji  $Q$  w każdej iteracji rosła. W związku z tym, zamiast maksymalizować wyrażenie (23) można znaleźć jakkolwiek wektor parametrów obiektu  $\theta_t$ , który spełnia zależność

$$Q(\theta_t, \theta_{t-1}) > Q(\theta_{t-1}, \theta_{t-1}). \quad (34)$$

Takie podejście powoduje, że znacznie łatwiej znajduje się kolejne wartości  $\theta_t$ , jednakże zarazem trzeba liczyć się z wydłużeniem ogólnej liczby iteracji  $T$ .

W związku z tym, że w kolejnych iteracjach zmienia się wektor parametrów  $\theta$ , zmienia się także model obiektu, a co za tym idzie – także modele przejścia i pomiarowy. Pociąga to za sobą potrzebę każdorazowego przeliczania filtru cząsteczkowego oraz wygładzania wartości zmiennej stanu w każdej kolejnej iteracji algorytmu. Należy brać to pod uwagę podczas wyboru pomiędzy bardziej złożoną metodą poszukiwania ekstremum (22) skutkującą mniejszą liczbą iteracji  $T$ , a metodą prostszą, ale pociągającą za sobą większą liczbę powtórzeń zadziałania filtru i wygładzacza.

Krok 4 Algorytmu 1 wymaga przyjęcia pewnej wartości  $\varepsilon > 0$ . Jeśli wzrost  $Q$  będzie mniejszy od  $\varepsilon$ , to nastąpi zatrzymanie. Innymi słowy Algorytm 1 będzie wykonywany tak długo, jak prawdziwe będzie wyrażenie

$$Q(\theta_t, \theta_{t-1}) - Q(\theta_{t-1}, \theta_{t-1}) > \varepsilon. \quad (35)$$

## 6. PODSUMOWANIE

---

W artykule opisano zasadę działania filtru cząsteczkowego oraz wygładzacza cząsteczkowego. Przedstawiono wyniki działania obydwu i zwrócono uwagę na zachowanie pewnej ostrożności podczas wykorzystywania wygładzania w algorytmie.

Przedstawiono także estymację parametrów metodą największej wiarygodności i opisano wykorzystany do tego algorytm oczekiwanie-maksymalizacja.

Przyglądając się poszczególnym wzorom w 4 rozdziale, można dojść do wniosku, że algorytm oczekiwanie-maksymalizacja polega na takim dobraniu parametrów  $\theta$ , aby model przejścia oraz model pomiarowy (które są zależne od wektora parametrów) jak najbardziej odpowiadały kolejnym wartościom zmiennej stanu w czasie symulacji.

Przy założeniu, że znany jest model przejścia oraz model obiektu (ale tylko w kontekście kształtu fgp, a nie konkretnego modelu obiektu) można rozpatrzyć metodę, która służyłaby do poszukiwania wektora parametrów tylko na podstawie tych dwóch modeli  $p(x_k | x_{k-1})$  oraz  $p(y_k | x_k)$ .

## LITERATURA

1. Arulampalam S., Maskell S., Gordon N., Clapp T.: A tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. IEEE Proceedings on Signal Processing, Vol. 50, No. 2, 2002, s. 174-188.
2. Brzozowska-Rup K., Dawidowicz A.L.: Metoda filtru cząsteczkowego. Matematyka Stosowana: matematyka dla społeczeństwa 2009, T. 10/51, s. 69-107.

3. Candy J.V.: Bayesian signal processing. WILEY, New Jersey 2009, s. 237-298.
4. Doucet A., Freitas N., Gordon N.: Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Springer-Verlag, New York 2001, s. 139-196.
5. Doucet A., Johansen A.M.: A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years later. Handbook of Nonlinear Filtering 2009/12, s. 656-704.
6. Gordon N.J., Salmond N.J., Smith A.F.M.: Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. IEE Proceedings-F, Vol. 140, No. 2, 1993, s. 107-113.
7. Koziński P., Lis M.: Filtr cząsteczkowy w problemie śledzenia – wprowadzenie. Studia z Automatyki i Informatyki, Tom 37 (2012), s. 79-94.
8. Ljung L.: Perspectives on system identification. Plenary talk at the 17th IFAC world congress. Seoul, Korea. July 6-11.
9. Merwe R., Doucet A., Freitas N., Wan E.: The Unscented Particle Filter. Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 13), Dec. 2000.
10. Schön T.B., Wills A., Ninness B.: System identification of nonlinear state-space models. Automatica 47 (2011), s. 39-49.
11. Simon D.: Optimal State Estimation. WILEY-INTERSCIENCE, New Jersey 2006, s. 461-484.

Rękopis dostarczono dnia 16.07.2012 r.

## EMPLOY A PARTICLE FILTER IN THE IDENTIFICATION PROCEDURE

Piotr KOZIERSKI

**ABSTRACT** *A way of parameter estimation of nonlinear dynamic systems in state-space form is presented. The identification uses Maximum Likelihood method (ML), Particle Filter approach and Expectation-Maximization algorithm (EM).*

**Keywords:** *identification, maximum likelihood method, particle filter, expectation-maximization*

**Mgr inż. Piotr KOZIERSKI** – student studiów stacjonarnych III st. na Politechnice Poznańskiej od 2010 roku. Obszar zainteresowań naukowych obejmuje identyfikację obiektów nieliniowych oraz filtry cząsteczkowe.



