

Michał JANASZEK

OPTYMALIZACJA STATYCZNA STEROWANIA SILNIKA SYNCHRONICZNEGO O MAGNESACH TRWAŁYCH

STRESZCZENIE *Omówiono kryteria optymalizacji statycznej sterowania silnika synchronicznego o magnesach trwałych: maksymalizacji stosunku moment/prąd; moment/strumień i maksymalizacji stosunku moment/prąd przy stałym strumieniu. Założono, że silnik jest idealny o budowie symetrycznej, obwód magnetyczny jest liniowy, silnik ma sinusoidalny rozkład strumienia oraz sinusoidalne przebiegi sił elektromotorycznych przy stałej prędkości kątowej. Podano zależności określające moment rozwijany przez silnik, z uwzględnieniem zjawiska oddziaływania twornika. Przedstawiono charakterystyki porównawcze przy sterowaniu optymalnym silnika synchronicznego o magnesach trwałych dla przyjętych kryteriów optymalności statycznej. Pokazano zależności prądu i strumienia silnika od momentu obciążenia.*

1. WSTĘP

W latach 1998 – 2001 w Zakładzie Elektrycznych Napędów Obrabiarkowych prowadzone były prace nad analizą metod sterowania stosowanych w napędach z silnikami synchronicznymi o magnesach trwałych. W pracach nad modelowaniem numerycznym, budową napędu doświadczalnego i badaniach laboratoryjnych wykorzystywano sterownik DS1102 firmy dSPACE oparty

dr inż. Michał JANASZEK

Zakład Elektrycznych Napędów Obrabiarkowych
Instytut Elektrotechniki

na procesorze sygnałowym (DSP) trzeciej generacji o arytmetyce zmiennoprzecinkowej TMS320C31 produkowanym przez firmę Texas Instruments [2]. Przeznaczony jest on do budowy szybkich regulatorów cyfrowych pracujących w czasie rzeczywistym oraz ogólnie w procesach przetwarzania sygnałów cyfrowych. Oprogramowanie sterownika ControlDesk - dSPACE zawiera wszystkie funkcje potrzebne do automatycznej regulacji, pomiarów i przeprowadzania eksperymentów w czasie rzeczywistym. Właśnie zastosowanie nowoczesnych, szybkich procesorów sygnałowych pozwoliło na jednoczesną regulację momentu elektromagnetycznego i strumienia stojana silnika synchronicznego o magnesach trwałych, a ponadto na pracę przy osłabionym strumieniu. Osłabienie strumienia silnika pozwala na zmniejszenie strat energii w silniku szczególnie przy dużych prędkościach kątowych.

W porównaniu z silnikami indukcyjnymi klatkowymi, silniki synchroniczne o magnesach trwałych zasilane z trójfazowych falowników tranzystorowych charakteryzują się większą sprawnością, większym współczynnikiem mocy i większym stosunkiem „moc/ciężar”. Dlatego ich wykorzystanie w napędach przemysłowych szybko wzrasta. Napędy falownikowe z silnikami synchronicznymi o magnesach trwałych są aktualnie przedmiotem badań i rozwoju w wielu ośrodkach, w szczególności zagranicznych. Na podstawie prac Blaschke, Hasse i Leonharda opracowano metody sterowania wektorowego przeznaczone dla napędów o regulowanej chwilowej wartości momentu elektromagnetycznego i wysokich właściwościach dynamicznych. Polegają one na tym, że regulowane są nie tylko amplitudy i prędkości kątowe wektorów przestrzennych napięć, prądów i strumieni skojarzonych, ale również fazy tych wektorów oraz ich wzajemne położenie. Układy regulacji wymuszają optymalną orientację wektorów zarówno w stanach statycznych jak dynamicznych. Dotychczas metody sterowania wektorowego były opracowywane i stosowane przede wszystkim do napędów z silnikami indukcyjnymi klatkowymi. Przy sterowaniu silnikami synchronicznymi o magnesach trwałych z sinusoidalną siłą elektromotoryczną napotyka się na trudności spowodowane szczególnymi właściwościami tych silników: małą indukcyjnością uzwojeń fazowych, małym momentem bezwładności wirnika, niewielkim wpływem prądu stojana na wypadkowy strumień magnetyczny stojana. Właściwości te, można jednak uznać za zalety silnika synchronicznego, które pozwalają na uzyskanie wysokich parametrów dynamicznych. Wymaga to jednak intensywnych badań nad wyborem struktury regulacyjnej, optymalizacją strategii sterowania i metodami doboru nastaw regulatorów. Innym ważnym parametrem napędu jest sprawność. W znacznym stopniu zależy ona od przyjętej metody sterowania (praca dwustrefowa silnika, straty łączniowe falownika napięcia) [7, 8].

2. MODEL MATEMATYCZNY SILNIKA SYNCHRONICZNGO O MAGNESACH TRWAŁYCH

Dynamikę silnika synchronicznego opisują macierzowe równania różniczkowe [3, 4, 6]:

Równanie napięć:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{u} \quad (1)$$

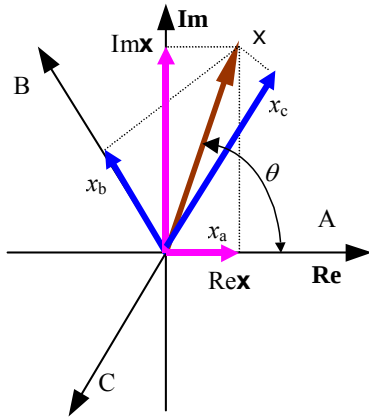
Równanie dynamiki ruchu:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \cdot p \cdot (\boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{i}) - \frac{k_t}{J} \omega + \frac{1}{J} M_0 \quad (2)$$

Zakładając prędkość obrotową silnika $n = \frac{60}{2\pi} \cdot \omega \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right]$ określamy pulsację przebiegów czasowych w poszczególnych fazach $p\omega \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right]$, gdzie: kąt położenia wirnika $\gamma = p\omega t$, liczba par biegunów p , prędkość kątowna silnika ω .

W pracy przyjęto następujące założenia [5]:

- rozpatruje się trójfazowy silnik synchroniczny o magnesach trwałych idealny o budowie symetrycznej,
- obwód magnetyczny silnika synchronicznego jest liniowy,
- silnik ma sinusoidalny rozkład strumienia od magnesów trwałych oraz sinusoidalny przebieg sił elektromotorycznych przy stałej prędkości kątownej,
- silnik zasilany jest przez trójfazowy falownik napięcia,
- falownik napięcia zawiera elementy idealne, w szczególności pomija się straty,
- napięcie pośredniczące falownika jest stałe, niezależne od czasu i obciążenia, nie zawiera składowej zmiennej.



Rys.1. Przedstawienie wektora przestrzennego w układach odniesienia: trójfazowym i prostokątnym.

Dla uproszczenia opisu dynamiki maszyn trójfazowych stosuje się powszechnie układy współrzędnych prostokątnych. Ten sam wektor opisany przez wartości fazowe (x_a, x_b, x_c) (odpowiednio: napięć, prądów, strumieni skojarzonych) może być opisany przez składowe podłużną i poprzeczną dla prostokątnego układu odniesienia pod warunkiem, że suma wartości fazowych równa się zero:

$$x_a + x_b + x_c = 0 \quad (3)$$

W opisie matematycznym układów napędowych z silnikiem synchronicznym stosuje się dwa układy odniesienia:

a) Układ współrzędnych nieruchomych α, β :

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} \cos(p\omega t + \theta) \\ \sin(p\omega t + \theta) \end{bmatrix} \quad (4)$$

b) Układ współrzędnych wirujących d, q :

$$\mathbf{x}_{dq} = \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (5)$$

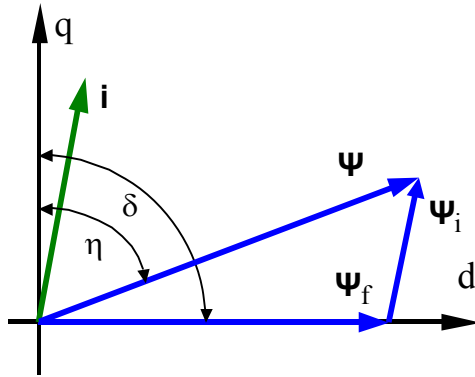
Dokonując transformacji wektorów strumienia, napięcia, siły elektromotorycznej i prądu otrzymuje się zapis w prostokątnym układzie odniesienia. (rys.1) (Tab. 1)

TABELA 1

Zapisy wektorów strumienia, napięcia, siły elektromotorycznej i prądu w prostokątnych układach odniesienia: stacjonarnym α, β i wirującym d, q .

Układ współrzędnych α, β	Układ współrzędnych d, q
$\Psi_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \psi_{\alpha} \\ \psi_{\beta} \end{bmatrix} = \Psi \cdot \begin{bmatrix} \cos(p\omega t + \lambda) \\ \sin(p\omega t + \lambda) \end{bmatrix}$	$\Psi_{dq} = \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} = \Psi \cdot \begin{bmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \end{bmatrix}$
$\Psi_{f\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \psi_{f\alpha} \\ \psi_{f\beta} \end{bmatrix} = \Psi_f \cdot \begin{bmatrix} \cos(p\omega t) \\ \sin(p\omega t) \end{bmatrix}$	$\Psi_{fdq} = \begin{bmatrix} \psi_{fd} \\ \psi_{fq} \end{bmatrix} = \Psi_f \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{u}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} u_{\alpha} \\ u_{\beta} \end{bmatrix} = U \cdot \begin{bmatrix} \cos(p\omega t + \mu) \\ \sin(p\omega t + \mu) \end{bmatrix}$	$\mathbf{u}_{dq} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = U \cdot \begin{bmatrix} \cos(\mu) \\ \sin(\mu) \end{bmatrix}$
$\mathbf{E}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} u_{\alpha} \\ u_{\beta} \end{bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} -\sin(p\omega t) \\ \cos(p\omega t) \end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_{dq} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i_{\alpha} \\ i_{\beta} \end{bmatrix} = I \cdot \begin{bmatrix} \cos(p\omega t + \delta) \\ \sin(p\omega t + \delta) \end{bmatrix}$	$\mathbf{i}_{dq} = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = I \cdot \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}$

3. ZJAWISKO ODDZIAŁYWANIA TWORNIKA



Strumień magnetyczny zawiera w sobie dwie składowe:

1. Strumień magnetyczny wzbudzenia od magnesów trwałych Ψ_f .
2. Strumień magnetyczny wytwarzany przez prądy fazowe: $\Psi_i = L_s i$.

Czyli strumień stojana jest sumą geometryczną dwóch wektorów:

Rys.2. Składowe wektora strumienia.

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_f = L_s i + \Psi_f \quad (6)$$

Równanie napięciowe można przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{dt} [L_s i + \Psi_f] = -R_s i + u \quad (7)$$

lub

$$L_s \frac{d}{dt} i + \frac{d}{dt} \Psi_f = -R_s i + u \quad (8)$$

Pochodne strumienia magnetycznego od magnesów trwałych obliczamy zakładając, że moduł wektora strumienia jest stały: $\Psi_f = \text{const}$

$$\frac{d}{dt} \Psi_f = p \cdot \omega \cdot \Psi_f \cdot \begin{bmatrix} -\sin(p\omega t) \\ \cos(p\omega t) \end{bmatrix} = \omega \cdot \mathbf{K}_e \quad (9)$$

W zapisie we współrzędnych prostokątnych wektor $\mathbf{K}_e$ zapisujemy jako:

W układzie współrzędnych α, β :

$$\mathbf{K}_e = k_e \cdot \begin{bmatrix} -\sin(p\omega t) \\ \cos(p\omega t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

W układzie współrzędnych $\mathbf{d}, \mathbf{q}$:

$$\mathbf{K}_e = k_e \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Stała napięciowa silnika równa się

$$k_e = p \cdot \Psi_f$$

W rezultacie równanie napięciowe:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = -\frac{R_s}{L_s} \mathbf{i} - \frac{\omega}{L_s} \mathbf{K}_e + \frac{1}{L_s} \mathbf{u} \quad (12)$$

4. MOMENT ROZWIJANY PRZEZ SILNIK SYNCHRONICZNY

Prąd elektryczny płynący w uzwojeniach fazowych silnika, współdziałając ze strumieniem magnetycznym skojarzonym z uzwojeniami poszczególnych faz, wytwarza moment elektromagnetyczny. W zapisie wektorowym moment jest iloczynem wektorowym wektora prądu i wektora strumienia:

a) dla układu α, β :

$$M_e = \frac{3}{2} p \cdot (\boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{i}) = \frac{3}{2} p \cdot \begin{vmatrix} \Psi_\alpha & \Psi_\beta \\ i_\alpha & i_\beta \end{vmatrix} = \frac{3}{2} p \cdot (\Psi_\alpha i_\beta - \Psi_\beta i_\alpha) = \frac{3}{2} p \cdot \Psi \cdot I \cdot \sin(\eta) \quad (13)$$

b) dla układu $\mathbf{d}, \mathbf{q}$:

$$M_e = \frac{3}{2} p \cdot (\boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{i}) = \frac{3}{2} p \cdot \begin{vmatrix} \Psi_d & \Psi_q \\ i_d & i_q \end{vmatrix} = \frac{3}{2} p \cdot (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) = \frac{3}{2} p \cdot \Psi \cdot I \cdot \sin(\eta) \quad (14)$$

def.1: Moment rozwijany przez silnik jest proporcjonalny do amplitudy strumienia stojana, amplitudy prądu i sinusa kąta między strumieniem stojana a prądem.

Ta definicja jest podstawą do strategii sterowania zorientowanego polowo, w której ustala się kąt prosty pomiędzy wektorem strumienia stojana a prądem.

Uwzględniając oddziaływanie twornika strumień magnetyczny opisujemy równaniem zawierającym dwie składowe: strumień wzbudzenia od magnesów trwałych i strumień indukowany w uzwojeniach stojana przez prądy fazowe (6).

Dokonując przekształceń otrzymuje się:

$$M_e = \frac{3}{2} p \cdot (\Psi \times i) = \frac{3}{2} p \cdot [(L_s i + \Psi_f) \times i] = \frac{3}{2} p \cdot (\Psi_f \times i) \quad (15)$$

ponieważ $i \times i = 0$.

a) dla układu α, β :

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot (\psi_{f\alpha} i_\beta - \psi_{f\beta} i_\alpha) = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot (-\sin(p\omega t) i_\alpha + \cos(p\omega t) i_\beta) \quad (16)$$

W tym przypadku wektor:

$$\mathbf{K}_m = k_m [-\sin(p\omega t) \quad \cos(p\omega t)] \quad (17)$$

b) dla układu d, q :

$$M_e = \frac{3}{2} p \cdot \Psi_f i_q \quad (18)$$

wektor

$$\mathbf{K}_m = k_m [0 \quad 1] \quad (19)$$

oraz w obu przypadkach stała: $k_m = p \cdot \Psi_f$.

Podstawiając wyrażenia na składowe strumienia i prądu otrzymujemy:

a) dla układu α, β :

$$\begin{aligned} M_e &= \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I \cdot (\cos(p\omega t) \sin(p\omega t + \delta) - \sin(p\omega t) \cos(p\omega t + \delta)) \\ M_e &= \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I \cdot \sin(\delta) = \frac{3}{2} \cdot k_m \cdot I \cdot \sin(\delta) \end{aligned} \quad (20)$$

b) dla układu $\mathbf{d}, \mathbf{q}$:

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I \cdot \sin(\delta) = \frac{3}{2} \cdot k_m \cdot I \cdot \sin(\delta) \quad (21)$$

def.2: Moment rozwijany przez silnik jest proporcjonalny do amplitudy strumienia od magnesów trwałych, amplitudy prądu i sinusa kąta między strumieniem od magnesów trwałych a prądem.

Ta definicja jest podstawą do strategii sterowania zorientowanego wirnikowo, w której ustala się kąt prosty pomiędzy wektorem strumienia od magnesów trwałych, czyli położeniem wirnika, a prądem.

5. KRYTERIA OPTYMALIZACJI STATYCZNEJ

Wybór i przyjęcie właściwego kryterium optymalności jest w dużym stopniu sprawą subiektywną. Na ogół różne kryteria optymalności prowadzą do różnych układów sterowania. Ważniejsze kryteria rozważane w pracy to [4, 6]:

- Kryterium maksymalizacji momentu elektromagnetycznego w stosunku do prądu silnika (*moment/prąd*)

$$K_1 = \max\left(\frac{M_e}{I}\right) \quad (22)$$

przy:

$$\Psi_f = \text{const}.$$

- Kryterium maksymalizacji momentu w stosunku do strumienia stojana (*moment/strumień*)

$$K_2 = \max\left(\frac{M_e}{\Psi}\right) \quad (23)$$

przy:

$$I = \text{const}.$$

- Kryterium stałego strumienia

$$K_3 = \max\left(\frac{M_e}{I}\right) \quad (24)$$

przy:

$$\Psi = \text{const.}$$

Należy przyjąć ograniczenia wynikające z tego, że dopuszczalna wartość prądu silnika wynosi:

$$I_f = \frac{\Psi_f}{L_s} \quad (25)$$

Maksymalny moment, jaki może rozwinąć silnik synchroniczny o magnesach trwałych wynosi:

$$M_{e\max} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I_f = \frac{3}{2} \cdot k_m \cdot I_f \quad (26)$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń przyjęte zostaną oznaczenia:

$$\Psi = \kappa \Psi_f; \quad I = \iota I_f \quad M_e = \mu M_{e\max} \quad (27)$$

5.1. Kryterium maksymalizacji stosunku *moment/ prąd*

Kryterium (K_1) zapisane równaniem (22) odpowiada strategii sterowania zorientowanego wirnikowo. Wzór na moment zgodnie z (20) ma postać:

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I \cdot \sin(\delta) = \frac{3}{2} \cdot k_m \cdot I \cdot \sin(\delta) \quad (28)$$

co po podstawieniu do (22) daje:

$$K_1 = \max\left(\frac{M_e}{I}\right) = \max\left(\frac{3}{2} \cdot k_m \cdot \sin(\delta)\right) \quad (29)$$

K_1 osiąga wartość maksymalną $K_1 = \frac{3}{2} \cdot k_m$ dla kąta między strumieniem od magnesów trwałych (położeniem wirnika) a prądem $\delta = \frac{\pi}{2}$; czyli gdy $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Wówczas:

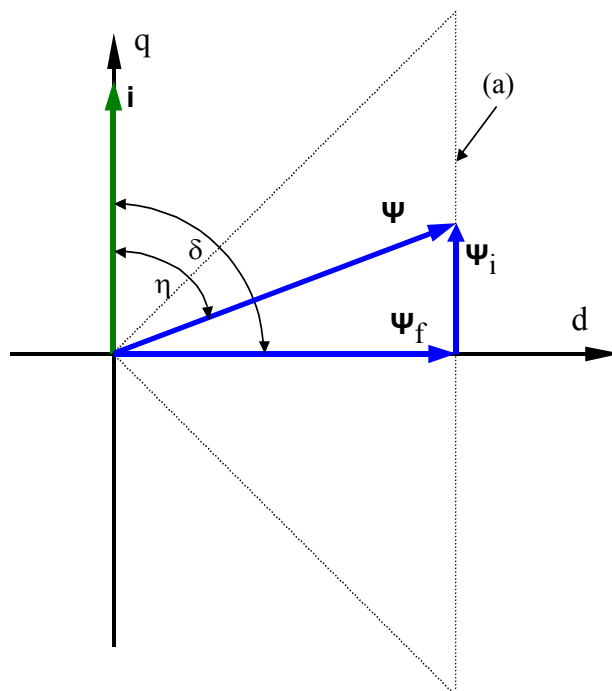
$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I = \frac{3}{2} \cdot k_m \cdot I \quad (30)$$

Przy takim sterowaniu strumień stojana Ψ jest większy od strumienia od magnesów trwałych a kąt η między strumieniem a prądem jest mniejszy od 90° . Porównując wyrażenia (30 i 14) określające moment elektromagnetyczny

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi \cdot I \cdot \sin(\eta) \quad (31)$$

otrzymuje się:

$$\sin(\eta) = \frac{\Psi_f}{\Psi} = \frac{1}{\kappa} < 1 \quad (32)$$



Rys.3. Położenie wektorów strumieni i prądu dla strategii sterowania zorientowanej wirnikowo. Kąt $\delta = \frac{\pi}{2}$

Koniec wektora strumienia przesuwa się po prostej (a), w zakresie $\Psi_i = \pm \Psi_f$. Koniec wektora prądu I przesuwa się po osi q w zakresie $I_q = \pm I_f$.

5.2. Kryterium maksymalizacji stosunku *moment/ strumień*

Kryterium (K_2) zapisane równaniem (23) odpowiada strategii sterowania zorientowanego polowo. Wzór na moment zgodnie z (13) ma postać:

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi \cdot I \cdot \sin(\eta) \quad (33)$$

co po podstawieniu do (23) daje:

$$K_2 = \max\left(\frac{M_e}{\Psi}\right) = \max\left(\frac{3}{2} \cdot p \cdot I \cdot \sin(\eta)\right) \quad (34)$$

Przy przyjęciu stałej amplitudy prądu $I = \text{const}$ osiąga wartość maksymalną $K_2 = \frac{3}{2} \cdot p \cdot I$ dla kąta między strumieniem a prądem $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Wówczas:

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi \cdot I \quad (35)$$

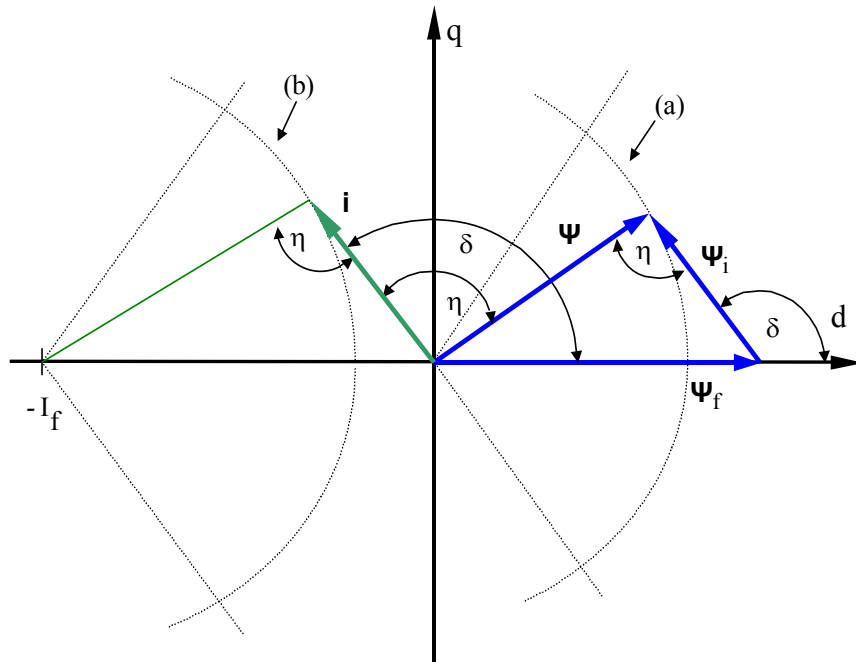
Przy takim sterowaniu strumień stojana Ψ jest mniejszy od strumienia od magnesów trwałych a kąt δ między strumieniem od magnesów trwałych a prądem jest większy od 90° .

Porównując wyrażenia (35 i 21) określające moment elektromagnetyczny

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi \cdot I = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I \cdot \sin(\delta) \quad (36)$$

otrzymuje się:

$$\sin(\delta) = \frac{\Psi}{\Psi_f} = \kappa < 1 \quad (37)$$



Rys.5. Położenie wektorów strumieni i prądu dla strategii sterowania $\Psi = \text{const}$.

Koniec wektora strumienia przesuwają się po okręgu (a), koniec wektora prądu przesuwają się po okręgu (b).

Trójkąty strumieni i trójkąty prądów są podobne (Rys. 5).
Stosując wzór cosinusów otrzymuje się:

$$\Psi_f^2 = \Psi^2 + \Psi_i^2 - 2\Psi\Psi_i\cos(\eta) \quad (40)$$

Należy przy tym przyjąć zależności:

$$\Psi = \kappa \cdot \Psi_f = \kappa \cdot L_s \cdot I_f; \quad \Psi_f = L_s \cdot I_f; \quad \Psi_i = L_s \cdot I$$

przy czym wartość współczynnika zawiera się w granicach: $0 < \kappa < 2$, co pozwoli wzór (40) przedstawić w postaci:

$$\cos(\eta) = \frac{\Psi_i^2 + (\kappa^2 - 1)\Psi_f^2}{2\kappa\Psi_f\Psi_i} \quad (41)$$

oraz:

$$\cos(\eta) = \frac{I^2 + (\kappa^2 - 1)I_f^2}{2\kappa I_f I} = \frac{t^2 + \kappa^2 - 1}{2\kappa t} \quad (42)$$

Zauważmy, że: $-1 < \cos(\eta) < 1$ a stąd wynika warunek ograniczenia dla strumienia:

$$\kappa^2 \Psi_f^2 - 2\kappa \Psi_f \Psi_i + \Psi_i^2 < \Psi_f^2 \Rightarrow \Psi_i > (\kappa - 1)\Psi_f \quad \text{dla } \kappa > 1 \quad (43)$$

$$\kappa^2 \Psi_f^2 + 2\kappa \Psi_f \Psi_i + \Psi_i^2 > \Psi_f^2 \Rightarrow \Psi_i > (1 - \kappa)\Psi_f \quad \text{dla } \kappa < 1 \quad (44)$$

oraz dla prądu:

$$\kappa^2 - 2\kappa t + t^2 < 1 \Rightarrow t > \kappa - 1 \quad \text{dla } \kappa > 1 \quad (45)$$

$$\kappa^2 + 2\kappa t + t^2 > 1 \Rightarrow t > 1 - \kappa \quad \text{dla } \kappa < 1 \quad (46)$$

Sinus kąta η zależny jest więc od prądu obciążenia:

$$\sin(\eta) = \sqrt{1 - \cos^2(\eta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{t^2 + \kappa^2 - 1}{2\kappa t} \right)^2} = \frac{1}{2\kappa t} \sqrt{4\kappa^2 t^2 - (t^2 + \kappa^2 - 1)^2} \quad (47)$$

Kryterium K_3 osiąga wartość maksymalną:

$$K_3 = \max\left(\frac{M_e}{I}\right) = \max\left(\frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4\kappa^2 t^2 - (t^2 + \kappa^2 - 1)^2}\right) \quad (48)$$

Oczywiście musi być spełniony warunek:

$$\kappa^2 - \left(\frac{t^2 + \kappa^2 - 1}{2t} \right)^2 > 0 \Rightarrow \pm \frac{t^2 + \kappa^2 - 1}{2t} > \kappa \quad (49)$$

a stąd otrzymuje się warunki (45 i 46).

Szczególnym przypadkiem jest $\Psi = \Psi_f$ czyli: $\kappa = 1$ wówczas:

$$\sin(\eta) = \sqrt{1 - \frac{\iota^2}{4}} \quad (50)$$

oraz:

$$K_3 = \max\left(\frac{M_e}{I}\right) = \max\left(\frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot \sqrt{1 - \frac{\iota^2}{4}}\right) \quad (51)$$

5.4. Porównanie kryteriów maksymalizacji momentu

Należy jeszcze odpowiedzieć na pytanie, które z kryteriów optymalizacji sterowania jest „lepsze”, czyli porównać ich wpływ na pracę silnika. W tym celu należy przeanalizować wpływ amplitudy prądu I na strumień i moment rozwijany przez silnik.

W kryterium (K_1 - *moment/prąd*) strumień jest zależny od prądu zgodnie z:

$$\Psi = \sqrt{\Psi_f^2 + (L_s I)^2} = \Psi_f \sqrt{1 + \iota^2} \quad (52)$$

Co daje zależność między strumieniem a prądem opisaną równaniem hiperboli:

$$\kappa = \sqrt{1 + \iota^2} \quad (53)$$

Ponieważ w tym przypadku moment rozwijany przez silnik jest wprost proporcjonalny do prądu to:

$$\mu = \iota; \quad (54)$$

a zależność między strumieniem a momentem jest również opisaną równaniem hiperboli:

$$\kappa = \sqrt{1 + \mu^2} \quad (55)$$

Podobnie przekształcając równania 55 i 53 otrzymuje się zależności między momentem i prądem, a strumieniem:

$$\mu = \sqrt{\kappa^2 - 1} \quad (56)$$

$$\iota = \sqrt{\kappa^2 - 1} \quad (57)$$

Dla kryterium (K_2 - *moment/strumień*) prąd silnika wpływa na wartość momentu rozwijanego przez silnik i strumienia stojana.

Należy zauważyć, że w tym przypadku wzór na strumień jest równaniem okręgu: (rys 4)

$$\Psi = \sqrt{\Psi_f^2 - (L_s I)^2} = \Psi_f \sqrt{1 - \cos^2(\delta)} = \Psi_f \sqrt{1 - \iota^2} \quad (58)$$

Co daje zależność między strumieniem a prądem opisaną równaniem okręgu:

$$\kappa = \sqrt{1 - \iota^2} \quad (59)$$

Moment rozwijany przez silnik jest w tym przypadku opisany równaniem:

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi \cdot I \quad (60)$$

Podstawiając wyrażenie na strumień (58) do (60) uzyskuje się zależność momentu od prądu:

$$M_e(I) = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I \cdot \sqrt{1 - \iota^2} = M_{e \max} \cdot \iota \sqrt{1 - \iota^2} \quad (61)$$

Czyli:

$$\mu = \iota \sqrt{1 - \iota^2} \quad (62)$$

Funkcja ta osiąga maksimum dla prądu:

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (63)$$

Wówczas moment osiąga wartość maksymalną:

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2} \quad (64)$$

strumień:

$$\kappa_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (65)$$

kąt między prądem a strumieniem od magnesów trwałych:

$$\sin(\delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \delta = \frac{3}{4}\pi \quad (66)$$

Zależność prądu od momentu otrzymuje się przekształcając równanie (62):

$$i^4 - i^2 + \mu^2 = 0 \quad (67)$$

Co można rozwiązać jak równanie kwadratowe:

$$i_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4\mu^2}} \quad (68)$$

$$i_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\mu^2}} \quad (69)$$

Oczywiście sens fizyczny mają tylko dodatnie wartości pierwiastków. Charakterystykę stabilnej pracy silnika opisuje równanie (68).

Ponadto konieczne jest spełnienie warunku:

$$1 - 4\mu^2 > 0 \Rightarrow \mu < \frac{1}{2} \quad (70)$$

Analogicznie podstawiając zależności 68 i 69 do równania 59 otrzymuje się zależności strumienia od momentu:

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\mu^2}} \quad (71)$$

$$\kappa_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4\mu^2}} \quad (72)$$

Charakterystykę stabilnej pracy silnika opisuje równanie (71). Podobnie przekształcając równania 61 i 59 otrzymuje się zależności między momentem i prądem, a strumieniem:

$$\mu = \kappa \sqrt{1 - \kappa^2} \quad (73)$$

$$\iota = \sqrt{1 - \kappa^2} \quad (74)$$

Dla kryterium ($K_3 - \Psi = \text{const}$) prąd silnika wpływa na wartość momentu.

$$M_e = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \Psi_f \cdot I_f \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4\kappa^2 \iota^2 - (\iota^2 + \kappa^2 - 1)^2} \quad (75)$$

Czyli:

$$\mu(\kappa, \iota) = \frac{1}{2} \sqrt{4\iota^2 \kappa^2 - (\iota^2 + \kappa^2 - 1)^2} \quad (76)$$

Wzór na moment można przedstawić jako:

$$\mu(\iota) = \frac{1}{2} \sqrt{-\iota^4 + 2(\kappa^2 + 1)\iota^2 - (\kappa^2 - 1)^2} \quad (77)$$

lub:

$$\mu(\kappa) = \frac{1}{2} \sqrt{-\kappa^4 + 2(\iota^2 + 1)\kappa^2 - (\iota^2 - 1)^2} \quad (78)$$

Wyrażenie (76) ma wartości rzeczywiste pod warunkiem:

$$\begin{aligned} 4\kappa^2\iota^2 > (\iota^2 + \kappa^2 - 1)^2 &\Rightarrow 2\kappa\iota > \iota^2 + \kappa^2 - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\iota - \kappa)^2 < 1 \end{aligned} \quad (79)$$

Czyli współczynniki powinny zawierać się w zakresach:

$$0 < \iota < 1 \quad \text{ i } \quad 0 < \kappa < 2 \quad \text{ oraz } \quad -1 < \iota - \kappa < 1 \quad (80)$$

Pochodna wyrażenia (77) ma postać:

$$\mu'(\iota) = \frac{4(-\iota^2 + \kappa^2 + 1)\iota}{\sqrt{-\iota^4 + 2(\kappa^2 + 1)\iota^2 - (\kappa^2 - 1)^2}} \quad (81)$$

Pochodna wyrażenia (78) ma postać:

$$\mu'(\kappa) = \frac{4(-\kappa^2 + \iota^2 + 1)\kappa}{\sqrt{-\kappa^4 + 2(\iota^2 + 1)\kappa^2 - (\iota^2 - 1)^2}} \quad (82)$$

Maksymalny moment uzyskujemy przy:

$$\mu'(\kappa) = 0 \quad \text{ tzn. dla } \kappa = \sqrt{\iota^2 + 1}$$

Podstawiając tą wartość do wzoru (77) uzyskujemy zależność maksymalnego momentu od prądu:

$$\mu(\iota) = \frac{1}{2} \sqrt{-\iota^4 + 2(\iota^2 + 2)\iota^2 - \iota^4} = \frac{1}{2} \sqrt{4\iota^2} = \iota \quad (83)$$

Co odpowiada sterowaniu według kryterium K_1 - *moment/prąd* lub sterowaniu zorientowanemu wirnikowo.

Zależność prądu od momentu oblicza się z równania (77) podnosząc obie strony do kwadratu i przekształcając:

$$\iota^4 - 2(\kappa^2 + 1)\iota^2 + (\kappa^2 - 1)^2 + 4\mu^2 = 0 \quad (84)$$

W rezultacie otrzymujemy pierwiastki:

$$\iota_1 = \sqrt{(\kappa^2 + 1) + 2\sqrt{\kappa^2 - \mu^2}} \quad (85)$$

$$\iota_2 = \sqrt{(\kappa^2 + 1) - 2\sqrt{\kappa^2 - \mu^2}} \quad (86)$$

Sens fizyczny ma zależność (86)

Dla szczególnego przypadku $\kappa = 1$ prąd zależy od momentu wg:

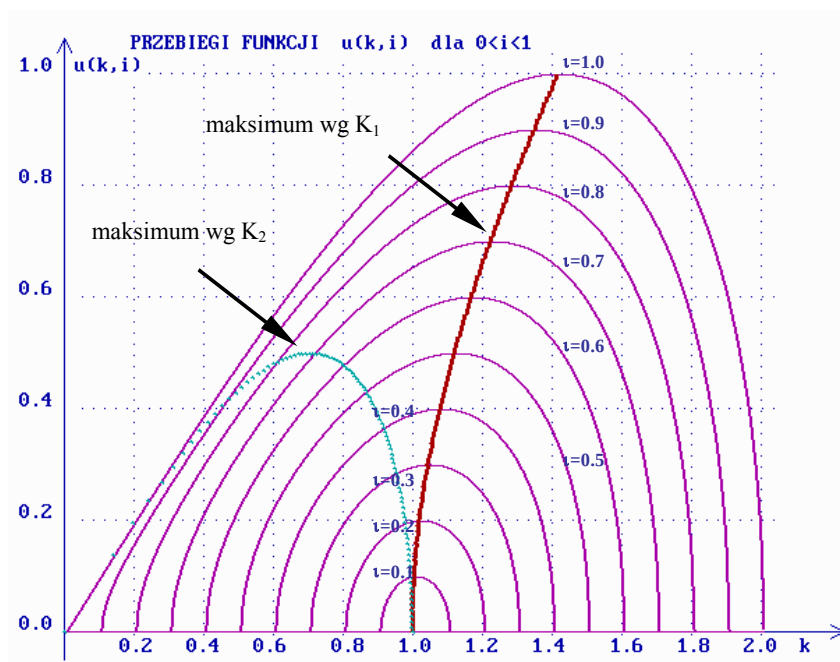
$$\iota = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (87)$$

Zależność maksymalnego momentu rozwijanego przez silnik od strumienia i prądu pokazano na rys. 6 i 7. Zestawienie wzajemnych zależności pomiędzy prądem, momentem i strumieniem dla trzech kryteriów optymalnego sterowania K_1 ; K_2 ; K_3 zamieszczono w tabeli 2. Wykresy tych zależności pokazano na rys. 8; 9; 10.

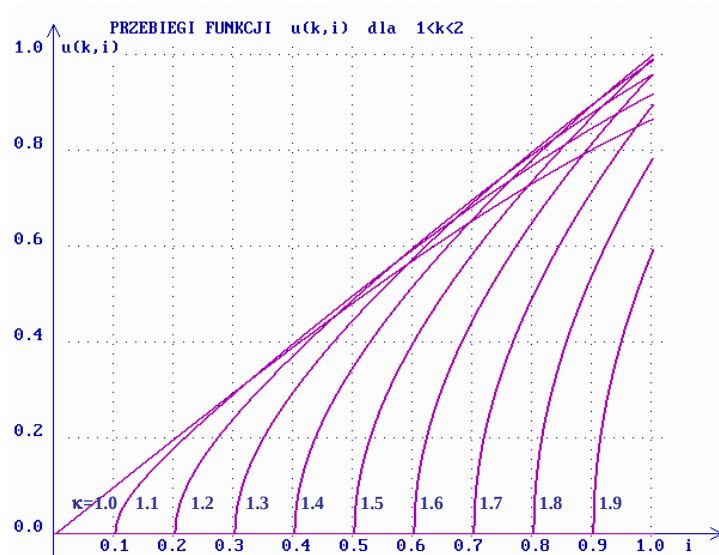
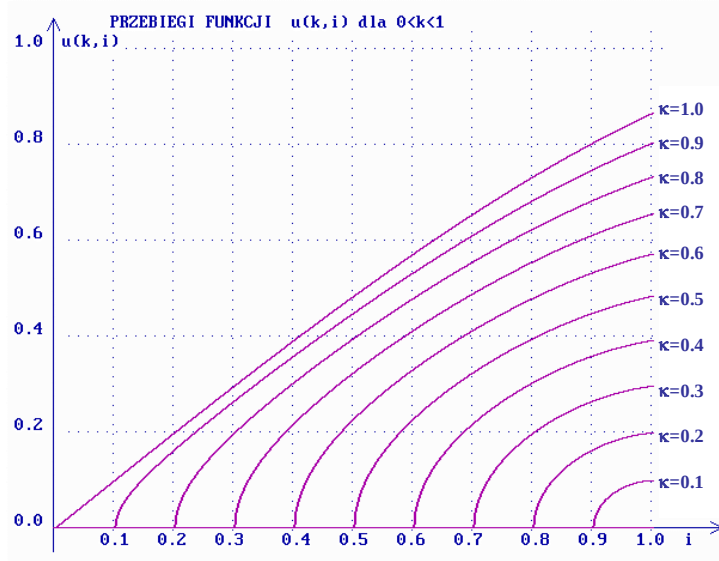
TABELA 2

Zestawienie funkcji opisujących przebiegi strumienia momentu i prądu dla kryteriów optymalizacji sterowania.

	$K_1 = \max\left(\frac{M_e}{I}\right)$ $\Psi_f = \text{const}$	$K_2 = \max\left(\frac{M_e}{\Psi}\right)$ $I = \text{const}$	$K_3 = \max\left(\frac{M_e}{I}\right)$ $\Psi = \text{const}$
$f(i)$	$\kappa = \sqrt{1+i^2}$ $\mu = i$	$\kappa = \sqrt{1-i^2}$ $\mu = i\sqrt{1-i^2}$	$\frac{\Psi}{\Psi_f} = \kappa$ $\mu = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-i^4 + 2(\kappa^2 + 1)i^2 - (\kappa^2 - 1)^2}$
$f(\mu)$	$\kappa = \sqrt{1+\mu^2}$ $i = \mu$	$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 \pm \sqrt{1-4\mu^2}}$ $i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 \mp \sqrt{1-4\mu^2}}$	$\frac{\Psi}{\Psi_f} = \kappa$ $i = \sqrt{(\kappa^2 + 1) - 2\sqrt{\kappa^2 - \mu^2}}$
$f(\kappa)$	$\mu = \sqrt{\kappa^2 - 1}$ $i = \sqrt{\kappa^2 - 1}$	$\mu = \kappa\sqrt{1-\kappa^2}$ $i = \sqrt{1-\kappa^2}$	$\mu(\kappa) = \frac{1}{2} \sqrt{-\kappa^4 + 2(i^2 + 1)\kappa^2 - (i^2 - 1)^2}$ $i = \sqrt{(\kappa^2 + 1) - 2\sqrt{\kappa^2 - \mu^2}}$



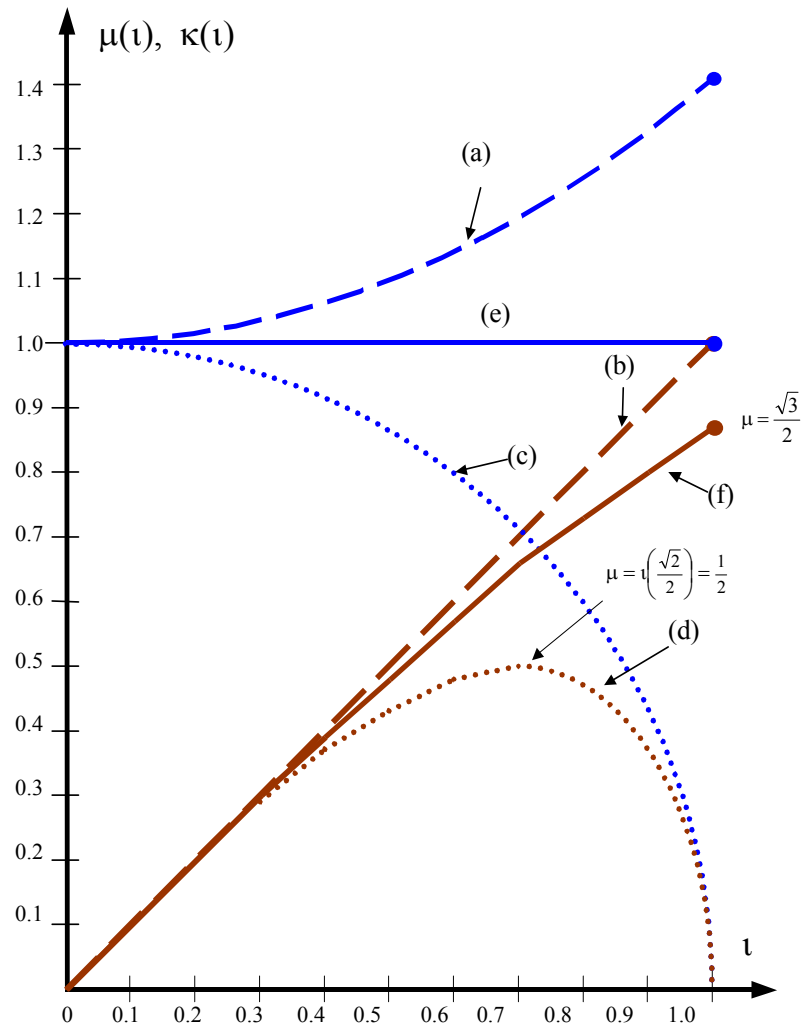
Rys.6. Zależność maksymalnego momentu rozwijanego przez silnik od strumienia i prądu. Krzywe ekstremalne dla kryterium K_1 oraz K_2 .



Rys.7. Zależność momentu od prądu przy zastosowaniu:

optimum $\Psi = \text{const}$ strumień $\frac{\Psi}{\Psi_f} = \kappa$

$$\text{Moment } \mu(\kappa, i) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-i^4 + 2(\kappa^2 + 1)i^2 - (\kappa^2 - 1)^2}$$



Rys.8. Zależność strumienia i momentu od prądu przy zastosowaniu:

optimum *moment/prąd*

a) Strumień $\kappa = \sqrt{1+i^2}$

b) Moment $\mu = i$

optimum *moment/ strumień*

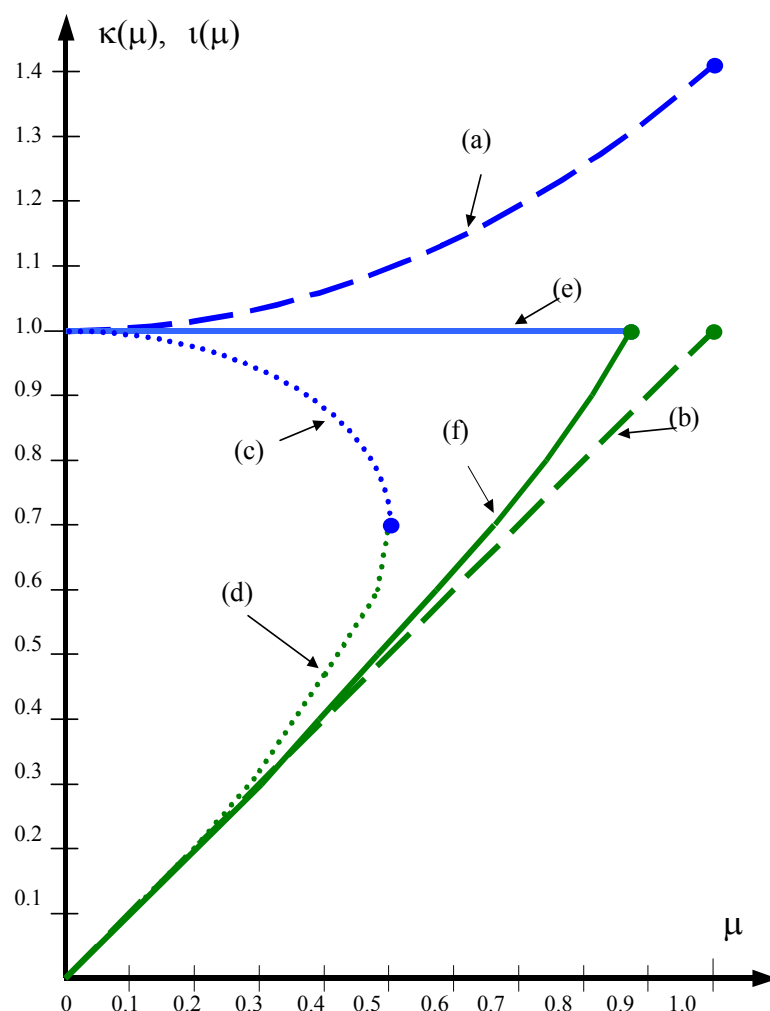
c) Strumień $\kappa = \sqrt{1-i^2}$

d) Moment $\mu = i\sqrt{1-i^2}$

optimum $\Psi = \Psi_f = \text{const}$

e) Strumień $\kappa = 1$

f) Moment $\mu = i\sqrt{1-\frac{1}{4}i^2}$



Rys.9. Zależność strumienia i prądu od momentu przy zastosowaniu:

Optimum *moment/prąd*

a) Strumień $\kappa = \sqrt{1 + \mu^2}$

b) Prąd $\iota = \mu$

Optimum *moment/ strumień*

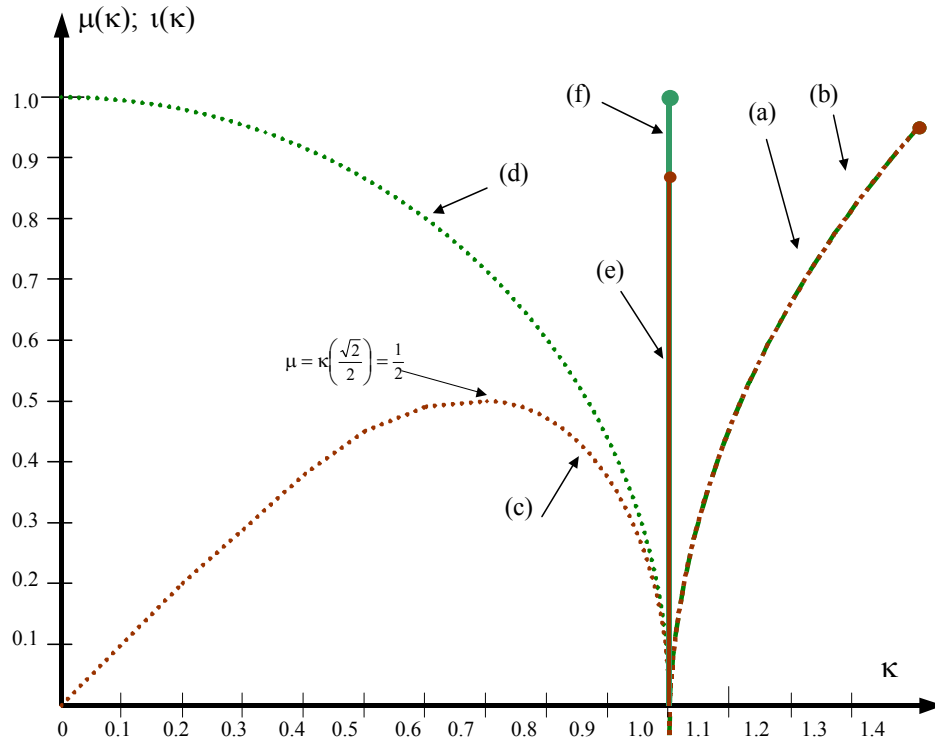
c) Strumień $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\mu^2}}$

d) Prąd $\iota = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4\mu^2}}$

Optimum $\Psi = \Psi_f = \text{const}$

e) Strumień $\kappa = 1$

f) Prąd $\iota = \sqrt{2} \left(1 - \sqrt{1 - \mu^2} \right)$



Rys.10. Zależność momentu i prądu od strumienia przy zastosowaniu:

Optimum *moment/prąd*

a) Moment $\mu = \sqrt{\kappa^2 - 1}$

b) Prąd $\iota = \sqrt{\kappa^2 - 1}$

Optimum *moment/strumień*

c) Moment $\mu = \kappa \sqrt{1 - \kappa^2}$

d) Prąd $\iota = \sqrt{1 - \kappa^2}$

Optimum $\Psi = \Psi_f = \text{const}$

e) Moment dla $\kappa = 1$

f) Prąd dla $\kappa = 1$.

6. STEROWANIE OPARTE NA ZASADZIE $\Psi = \text{const}$

Sterowanie takie można zrealizować w układzie regulacyjnym (rys.11) którego zadaniem jest utrzymywanie stałej wielkość strumienia stojana równej wartości zadanej. Obwód regulacji zawiera:

- Estymator określający moduł i położenie wektora strumienia na podstawie zmierzonych wartości fazowych napięć i prądów. Wykorzystuje

się tu fakt, że strumień stojana jest całką ze składowych wektora napięcia wg zależności:

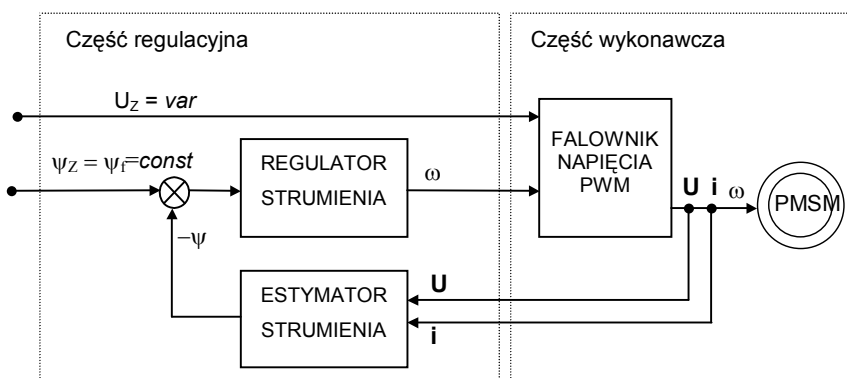
$$\psi_{\alpha} = \int (u_{\alpha} - R_s i_{\alpha}) dt \quad \psi_{\beta} = \int (u_{\beta} - R_s i_{\beta}) dt \quad (88)$$

Amplituda wektora strumienia równa się:

$$\Psi = \sqrt{\psi_{\alpha}^2 + \psi_{\beta}^2}, \text{ a faza: } \sigma = \arcsin \frac{\psi_{\beta}}{\Psi} \quad (89)$$

Przebiegi czasowe składowych strumienia, przy stałej prędkości kątowej, są przebiegami sinusoidalnymi. Również przebiegi składowych napięcia (wartości uśrednione za okres próbkowania) są sinusoidalne.

- Regulator strumienia tak steruje częstotliwością ω napięcia, aby moduł wektora strumienia był stały. Prędkość kątowa wirnika silnika jest nstawiana poprzez zmianę amplitudy napięcia stojana.



Rys.11. Schemat blokowy pętli regulacji strumienia silnika synchronicznego o magnesach trwałych.

Stała wartość strumienia:

$$\int_0^{\pi} u \sin(\omega t) dt = \text{const} \quad (90)$$

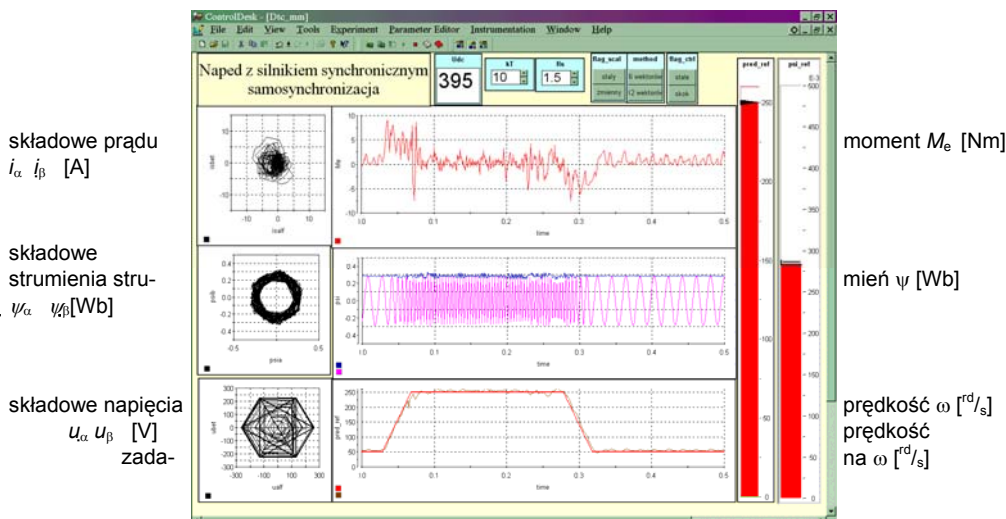
odpowiada warunkowi:

$$\frac{u}{\omega} = \text{const} \quad (91)$$

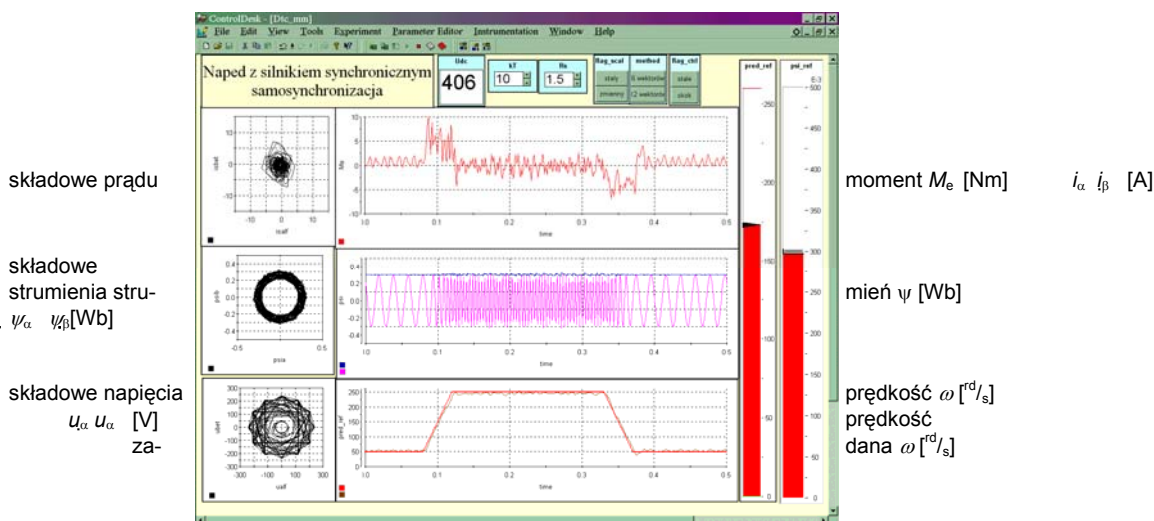
6.1. Wyniki badań napędu ze sterowaniem $\Psi = \text{const}$

Napęd z silnikiem synchronicznym ze sterowaniem $\Psi = \text{const}$ zaprogramowano, uruchomiono i przebadano doświadczalnie na stanowisku laboratoryjnym. Wykorzystano sterownik DS1102, tranzystorowy falownik napięcia LIFT-IEL oraz silnik RTMes 115-7 o parametrach znamionowych: moment $M = 7 \text{ Nm}$; prędkość $n = 3000 \text{ obr/min}$; napięcie 380 V ; prąd $3,5 \text{ A}$.

Regulator strumienia zaprogramowano w dwóch wersjach sterowania falownika przy użyciu 6 i 12 przełączalnych wektorów napięcia. Poniżej na rys.12 i 13, pokazano wybrane wyniki badań.



Rys. 12. Odpowiedź układu na zmianę napięcia zasilającego U_z . Rozruch od 50 do 250 rd/s i hamowanie 250 do 50 rd/s Regulator strumienia z wykorzystaniem 6 wektorów napięcia.



Rys.13. Odpowiedź układu na zmianę napięcia zasilającego U_z . Rozruch od 50 do 250 $^\circ$ /s i hamowanie 250 do 50 $^\circ$ /s. Regulator strumienia z wykorzystaniem 12 wektorów napięcia.

7. WNIOSKI

Porównanie kryteriów K_1 - *moment/prąd*; K_2 - *moment/strumień* oraz K_3 - $\Psi = \text{const}$ można zestawiać następująco:

- Moment rozwijany przez silnik synchroniczny można przedstawić jako funkcję dwóch zmiennych: strumienia stojana i prądu stojana $\mu(\kappa, i)$. Sterowanie optymalne ma na celu takie ustawianie strumienia i prądu aby funkcja $\mu(\kappa, i)$ osiągała maksimum.
- Regulacja strumienia magnetycznego silnika pozwala na realizację wszystkich omówionych w pracy kryteriów optymalności. Konieczne jest przy tym odpowiednie zadawanie strumienia stojana w zależności od prądu.
- Przy odpowiednim zadawaniu wartości strumienia w zależności od prądu

stojana: $\Psi = \Psi_f \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{I}{I_f}\right)^2}$ kryterium K_3 - $\Psi = \text{const}$. odpowiada strategii

sterowania zorientowanego wirnikowo wg kryterium K_1 - *moment/prąd*.

- Przy odpowiednim zadawaniu wartości strumienia w zależności od prądu

stojana: $\Psi = \Psi_f \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_f}\right)^2}$ kryterium K_3 - $\Psi = \text{const}$. odpowiada strategii

sterowania zorientowanego wirnikowo wg kryterium K_2 - *moment/strumień*.

- Do sterowania silnikami synchronicznymi o magnesach trwałych wskazane są kryteria optymalności statycznej K_1 - *moment/prąd* oraz K_3 - $\Psi = \text{const}$. Kryterium K_2 - *moment/strumień* powoduje osłabienie strumienia silnika i wskazane jest przy dużych prędkościach kątowych dla ograniczenie strat w żelazie.

LITERATURA

1. Boldea I., Nasar S. A.: Vector control of Ac Drives. CRC Press 2000.
2. DS1102 User's Guide – dSPACE digital signal processing and control engineering GmbH 1999.
3. Janaszek M.: Experimental drive with direct torque control of permanent magnet synchronous motor. Archives of Electrical Engineering 2001 vol.1 pp.73-92.
4. Janaszek M.: Problemy bezpośredniej regulacji momentu i strumienia silnika synchronicznego o magnesach trwałych. Rozprawa doktorska 2001 r.
5. Kaźmierkowski M. P., Tunia H.: Automatic Control of Converter-Fed Drives. PWM - Polish Scientific Publishers Warszawa 1994.
6. Krishnan R.: Electric Motor Drives. Modeling, Analysis and Control. Prentice Hall. Inc. 2001.
7. Vas Peter: Sensorless vector and direct torque control. Oxford University Press 1998 r.
8. Vas Peter: Electrical Machines and Drives. A Space-Vector Theory Approach. Clarendon Press – Oxford 1992 r.

Rękopis dostarczono, dnia 05.02.2002 r.

Opiniował: Prof. dr hab. inż. Marian P. Kaźmierkowski

STATIC OPTIMISATION OF CONTROL OF PERMANENT MAGNET SYNCHRONOUS MOTOR

M. JANASZEK

SUMMARY

Criteria of static optimum control of Permanent Magnet Synchronous Motor are discussed: maximum torque/ampere control, maximum moment/flux control and constant flux criterion. Assumption that motor is ideal, symmetrical, and flux circuit is linear, are adopted. Motor has sinusoidal distribution of magnetic flux and sinusoidal time waveform of electromotive forces at the constant angular velocity. Relationships described the electromagnetic torque with consideration of stator current influence are presented. Comparison optimal control PMSM for assumed criteria of static optimal control are presented. Relationship between motor current and flux by torque are demonstrated. Some oscillograms which illustrate the performance of the presented control laws are presented.

Dr inż. Michał Janaszek urodzony w 1951 r. w Warszawie, w roku 1974 ukończył studia na wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej uzyskując dyplom mgr inż. elektryka ze specjalnością automatyka. W październiku 1974 rozpoczął pracę w Instytucie Elektrotechniki w Zakładzie Elektrycznych Napędów Obrabiarkowych. Specjalizował się w napędach prądu stałego z tranzystorowymi wzmacniaczami mocy dla obrabiarek sterowanych numerycznie i robotów przemysłowych. Zajmował się identyfikacją parametrów dynamicznych maszyn prądu stałego, oraz numerycznym modelowaniem dynamiki w syntezie układów napędowych. Brał udział w opracowaniu i przygotowaniu do produkcji napędów dla robotów przemysłowych typu IRb, za co otrzymał nagrodę zespołową stopnia III MHiPM za rok 1986.



Od lat osiemdziesiątych zajmuje się napędami z silnikami synchronicznymi, w szczególności problemami optymalizacji sterowania. Stopień doktora uzyskał w roku 2001. Autor lub współautor ponad 20 publikacji z zakresu napędu elektrycznego.